Sections planes de surfaces. Annales

Exercice 1 :

Antille Guyane Sept 2009

L'annexe est à rendre avec la copie

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère la surface S_1 d'équation $z = x^2 + y^2$, et la surface S_2 d'équation $z = xy + 2x$.

Partie A

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = 2$, E_1 l'intersection de la surface S_1 et du plan $\mathcal{P}$ et E_2 l'intersection de la surface S_2 et du plan $\mathcal{P}$.

En **annexe**, le plan $\mathcal{P}$ est représenté muni du repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ où A est le point de coordonnées $(2\,;0\,;0)$.

1) a) Déterminer la nature de l'ensemble E_1.
   b) Déterminer la nature de l'ensemble E_2.
2) a) Représenter les ensembles E_1 et E_2 sur la feuille **annexe**.
   b) Dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2.

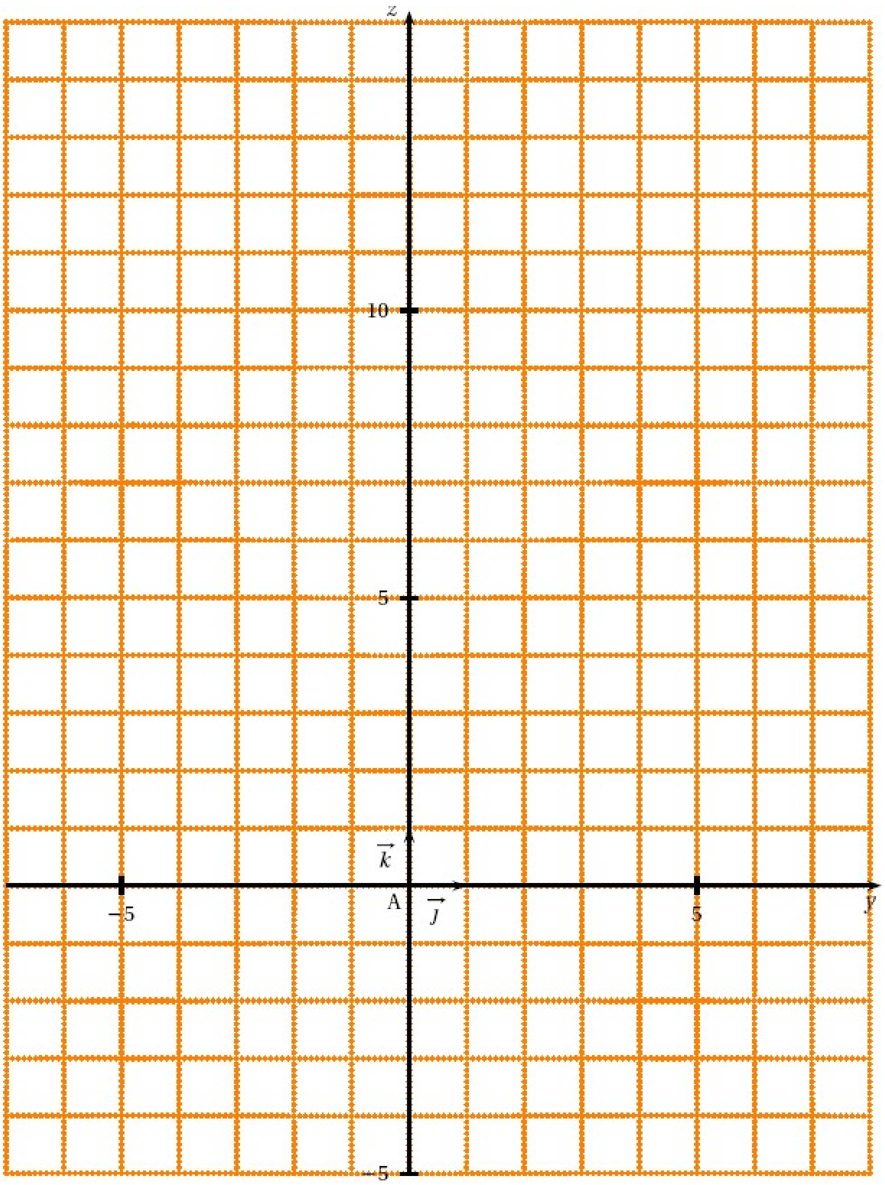
Partie B

On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante :
« *soient a, b et c des entiers avec a premier. Si a divise bc alors a divise b ou a divise c.* »

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ des surfaces S_1 et S_2 où y et z sont des entiers relatifs et x un nombre premier.
On considère un tel point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

1) a) Montrer que $y(y - x) = x(2 - x)$.
   b) En déduire que le nombre premier x divise y.
2) On pose $y = kx$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   a) Montrer que x divise 2, puis que $x = 2$.
   b) En déduire les valeurs possibles de k.
3) Déterminer les coordonnées possibles de M et comparer les résultats avec ceux de la Partie A, question 2b)

Annexe



Exercice 2 :

Pondichéry avril 2011

Partie A

On considère, dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathcal{S}$ d'équation :

$$z = (x - y)^2.$$

1) On note $\mathcal{E}_1$ l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z = 0$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_1$. On note $\mathcal{E}_2$ l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $x = 1$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_2$.

Partie B

On considère, dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathcal{S}'$ d'équation :

$$z = xy.$$

1) On note $\mathcal{E}_3$ l'intersection de $\mathcal{S}'$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z = 0$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_3$
2) On note $\mathcal{E}_4$ l'intersection de $\mathcal{S}'$ avec le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation $z = 1$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_4$.

Partie C

On note $\mathcal{E}_5$ l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$.

Dans cette partie, on souhaite démontrer que le seul point appartenant à $\mathcal{E}_5$ dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point $O(0\,;0\,;0)$.

On suppose qu'il existe un point M appartenant à $\mathcal{E}_5$ et dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

1) Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O.
2) On suppose dorénavant que l'entier x n'est pas nul.
   a) Montrer que les entiers x, y et z vérifient $x^2 - 3xy + y^2 = 0$.
   En déduire qu'il existe alors des entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0$.
   b) Montrer que x' divise y'^2, puis que x' divise y'.
   c) Établir que y' vérifie la relation $1 - 3y' + y'^2 = 0$.
   d) Conclure.

Exercice 3 :

Amérique du Sud Nov 2008

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées (0 ; 0 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées (1 ; 1 ; 0) et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t' \\ y = -t' \\ z = -2 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D'.

1) **Une équation de S**

a) Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite D.
Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{-x+y}{2}\ ;\ \dfrac{x-y}{2}\ ;\ 2-z\right)$.
En déduire MH^2 en fonction de x, y et z.
Soit K le projeté orthogonal de M sur D'. Un calcul analogue au précédent permet d'établir que : $MK^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.

c) Montrer qu'un point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\dfrac{1}{4}xy$.

2) **Étude de la surface S d'équation $z = -\dfrac{1}{4}xy$**

a) On coupe S par le plan (xOy). Déterminer la section obtenue.

b) On coupe S par un plan P parallèle au plan (xOy).
Quelle est la nature de la section obtenue ?

c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
On coupe S par le plan d'équation $x + y = 0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

Exercice 4 :

Centre étrangers juin 2009

1) On note (E) l'équation $3x + 2y = 29$ où x et y sont deux nombres entiers relatifs.

   a) Déterminer un couple d'entiers solution de l'équation (E).

   b) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

   c) Préciser les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a à la fois $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$;

2) Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées
   L'espace est muni du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 2y = 29$.

   a) Démontrer que $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$.

   b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$.

   c) Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les trois plans de coordonnées.

   d) Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (xOy), les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

3) Étude d'une surface
   $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $4z = xy$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
   Les figures suivantes représentent les intersections de $\mathcal{S}$ avec certains plans de l'espace.

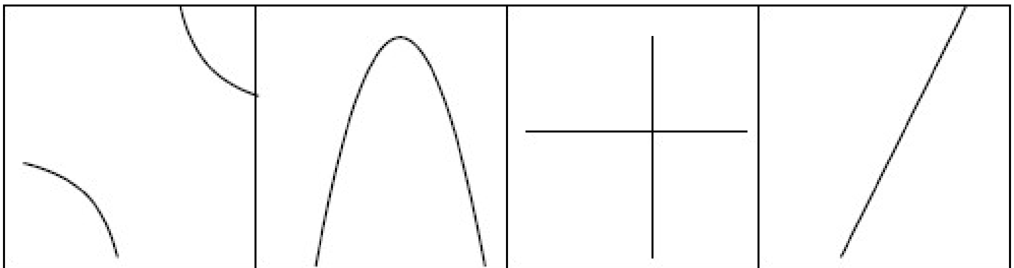


figure n° 1 — figure n° 2 — figure n° 3 — figure n° 4

   a) S_1 désigne la section de la surface $\mathcal{S}$ par le plan (xOy).
      Une des figures données représente S_1 laquelle ?

   b) S_2 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{R}$ d'équation $z = 1$.
      Une des figures données représente S_2, laquelle ?

   c) S_3 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y = 8$.
      Une des figures données représente S_3, laquelle ?

   d) S_4 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x + 2y = 29$ de la question 2)
      Déterminer les coordonnées des points communs à S_4 et $\mathcal{P}$ dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont des entiers naturels vérifiant l'équation
      $3x + 2y = 29$.

Exercice 5 :

La Réunion juin 2009

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1) Soient F le point de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$ et P le plan d'équation $z = -\dfrac{1}{4}$.

   On note $d(M,\ P)$ la distance d'un point M au plan P.

   Montrer que l'ensemble (S) des points M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui vérifient $d(M,\ P) = MF$ a pour équation $x^2 + y^2 = z$.

2) a) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $z = 2$?

   b) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $x = 0$?

   Représenter cette intersection dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

3) Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

   a) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?

   b) Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si et seulement si 7 divise x et 7 divise y.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble (S) et du plan d'équation $z = 98$ et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.

Exercice 6 :

Pondichéry avril 2010

Les parties A et B peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples $(a,\ b)$ d'entiers strictement positifs, tels que :

$$a^2 = b^3$$

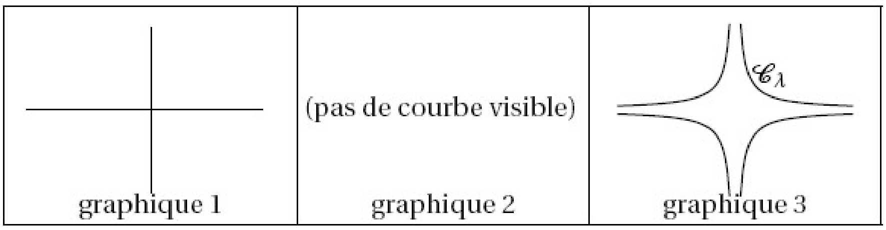
Soit $(a,\ b)$ un tel couple et $d = \text{PGCD}(a,\ b)$. On note u et v les entiers tels que $a = du$ et $b = dv$.

1) Montrer que $u^2 = dv^3$.
2) En déduire que v divise u, puis que $v = 1$.
3) Soit $(a,\ b)$ un couple d'entiers strictement positifs.
   Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.
4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse. sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \quad [7]$ ou $n \equiv 1 \quad [7]$.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère la surface S d'équation $x^2 \times y^2 = z^3$.
Pour tout réel λ, on note C_λ la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$.

1) Les graphiques suivants donnent l'allure de C_λ tracée dans le plan d'équation $z = \lambda$, selon le signe de λ.
   Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants : $\lambda < 0,\ \lambda = 0, \lambda > 0$, et justifier l'allure de chaque courbe.



2) a) Déterminer le nombre de points de C_{25} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.
   b) *Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question* 3 *de la partie A.*
   Déterminer le nombre de points de $C_{2\,010}$ dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs