

# Devoir similitude

Correction du lundi 2 mai 2011

## Exercice 1 :

### Centres étrangers 2010

- 1) a) Cf graphique  
b) On obtient les longueurs suivantes

$$AB = |b - a| = |-2 + i| = \sqrt{5}$$

$$AC = |c - a| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$$

$$BC = |c - b| = |3 + i| = \sqrt{10}$$

$$NM = |m - n| = |2 - 4i| = 2\sqrt{5}$$

$$NP = |p - n| = |4 + 2i| = 2\sqrt{5}$$

$$MP = |p - m| = |2 + 6i| = 2\sqrt{10}$$

- c) Les deux triangles  $ABC$  et  $NPM$  ayant des mesures proportionnelles sont donc semblables. De plus les deux triangles sont isocèles rectangles respectivement en  $A$  et  $N$ . En effet on a :  $AB = AC$  et  $NM = NP$  d'une part et  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  et  $MP^2 = NM^2 + NP^2$ .
- 2) a) 2 point distincts  $A$  et  $B$  et leurs images distinctes  $N$  et  $P$  détermine une unique similitude directe dont l'écriture complexe est :  $z' = \alpha z + \beta$ . On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} n = \alpha a + \beta \\ p = \alpha b + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - i = \alpha(1 + i) + \beta & (1) \\ 9 + i = \alpha(-1 + 2i) + \beta & (2) \end{cases}$$

$$\text{On obtient par (2) - (1) : } \alpha = \frac{4 + 2i}{-2 + i} = \frac{(4 + 2i)(-2 - i)}{5} = \frac{-6 - 8i}{5}$$

$$\text{De (1), on trouve : } \beta = 5 - i - \left(\frac{-6 - 8i}{5}\right)(1 + i) = \frac{23 + 9i}{5}$$

b) On obtient facilement le rapport :  $k = \left|\frac{-6 - 8i}{5}\right| = 2$

On ne peut donner qu'une valeur approchée de l'angle, avec :

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{3}{5} \\ \sin \theta = -\frac{4}{5} \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in [-180^\circ, -90^\circ]$$

On obtient alors  $\theta \simeq -127^\circ$

Pour le centre  $\Omega(\omega)$ , on résout l'équation au point fixe :

$$\begin{aligned}\omega &= \left(\frac{-6-8i}{5}\right)\omega + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i \\ 5\omega &= (-6-8i)\omega + 23 + 9i \\ \omega(11+8i) &= 23+9i \\ \omega &= \frac{23+9i}{11+8i} \\ \omega &= \frac{325-85i}{185} \\ \omega &= \frac{65-17i}{37}\end{aligned}$$

c) On calcule l'image de  $C$

$$\begin{aligned}z'_C &= \left(\frac{-6-8i}{5}\right)(2+3i) + \frac{23+9i}{5} \\ z'_C &= \frac{-12-18i-16i+24+23+9i}{5} \\ z'_C &= \frac{35-25i}{5} = 7-5i = m\end{aligned}$$

3) a) On calcule les image de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

$$\begin{array}{lll}z'_A = 2i(1-i) + 3 - 3i & z'_B = 2i(-1-2i) + 3 - 3i & z'_C = 2i(2-3i) + 3 - 3i \\ z'_A = 2i + 2 + 3 - 3i & z'_B = -2i + 4 + 3 - 3i & z'_C = 4i + 6 + 3 - 3i \\ z'_A = 5 - i = n & z'_B = 7 - 5i = m & z'_C = 9 + i = p\end{array}$$

b)  $s'$  ne peut être une réflexion car  $|2i| \neq 1$  et donc ne peut admettre au maximum qu'un point invariant. Montrons que  $K$  est invariant par  $s'$ .

$$z'_K = 2i(1+i) = 2i - 2 + 3 - 3i = 1 - i = k$$

c) Calculons l'image de  $K$

$$f(K) = s' \circ h(K) = K \quad \text{car } K \text{ est le centre des deux transformations}$$

Calculons l'image de  $J$  par  $h$ .

L'écriture complexe de  $h$  :  $z' - k = \frac{1}{2}(z - k)$  soit encore  $z' = \frac{1}{2}z + \frac{1-i}{2}$ .

$$z'_J = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1-i}{2} = \frac{3-i}{2}$$

Calculons maintenant l'image de ce point par  $s'$ . On a :

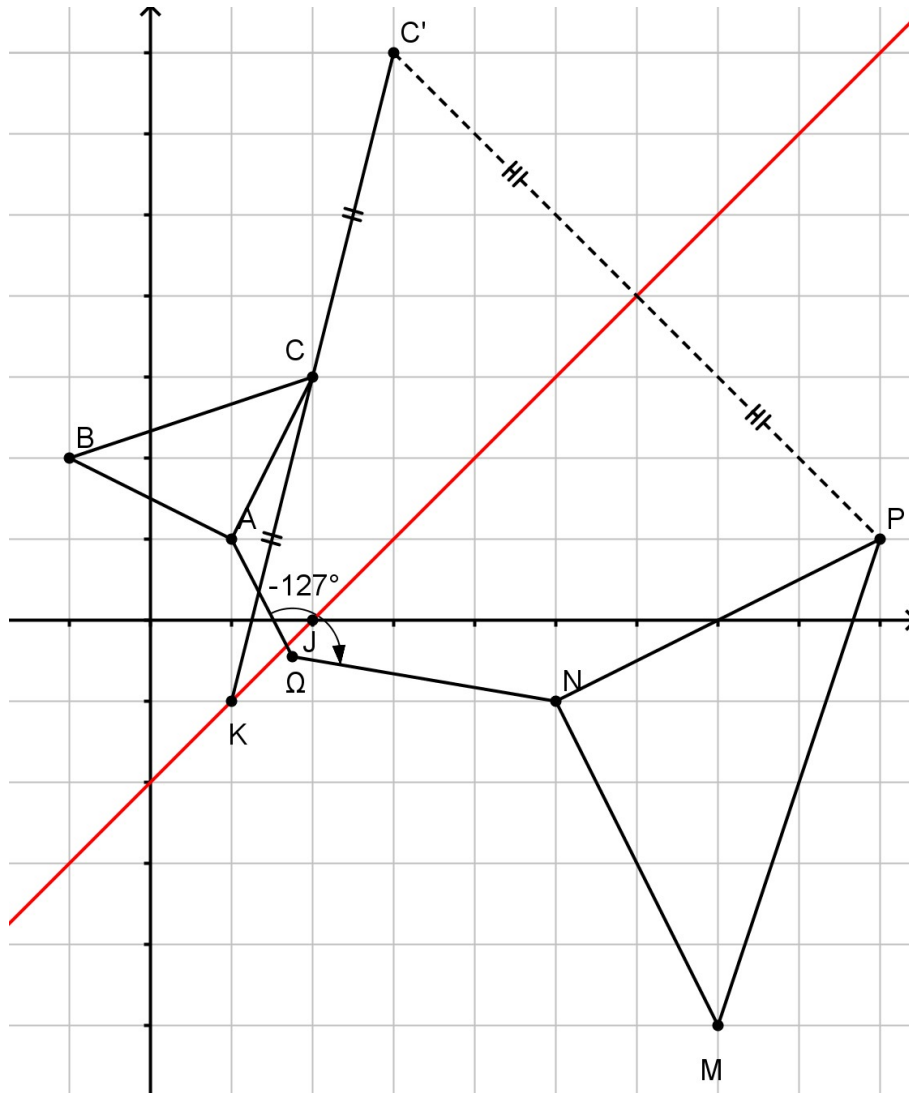
$$z''_J = 2i\left(\frac{3+i}{2}\right) + 3 - 3i = 3i - 1 + 3 - 3i = 2 = z_J$$

Conclusion :  $K$  et  $J$  sont invariants par  $f$ , comme une similitude qui admet deux points invariants est soit l'identité soit une réflexion,  $f$  est donc la réflexion d'axe  $(KJ)$

d) Composons  $f$  par l'homothétie réciproque de  $h$  soit  $h^{-1}$  qui est l'homothétie de centre  $K$  et de rapport 2. On a alors :

$$f \circ h^{-1} = s' \circ h \circ h^{-1} \Leftrightarrow s' = f \circ h^{-1}$$

$s'$  est donc la composée de l'homothétie de centre  $K$  et de rapport 2 et de la réflexion d'axe  $(KJ)$ .



## Exercice 2 :

Antilles-Guyane juin 2006

- 1) Théorème : 2 points  $A$  et  $D$  et leurs images  $I$  et  $E$  déterminent une unique similitude directe.
- 2) Le rapport est alors :  $k = \frac{IE}{AD}$

On détermine  $AD$  et  $IE$  par le théorème de Pythagore en prenant comme unité  $OA$ . On a alors :

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 = 1 + 4 = 5 \quad \text{et} \quad IE^2 = ID^2 + DE^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

On obtient alors :  $k = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ .

- 3) L'image de  $B$  par  $s$  est le point  $D$ . En effet les images par  $s$  des droites  $(AB)$  et  $(BD)$  sont les droites respectivement perpendiculaires à  $(AB)$  et  $(BD)$  et qui passent respectivement par  $I$  et  $E$
- 4)  $C$  étant le milieu de  $[BD]$ , comme la similitude conserve le milieu, l'image  $C'$  de  $C$  est le milieu de  $[s(B)s(D)] = [DE]$
- 5) a) La similitude  $s$  étant d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et comme  $s(A) = I$  et  $s(D) = E$ , les triangles  $\Omega AI$  et  $\Omega DE$  sont rectangles en  $\Omega$ . donc  $\Omega$  appartient aux cercles de diamètre  $[AI]$  et  $[DE]$ .
- b) Si  $H$  était le centre de la similitude, on devrait avoir :  $HE = \frac{1}{2}HD$ , ce qui n'est manifestement pas le cas.
- c) Cf graphique
- 6) a) On sait que la similitude  $s$  est de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , donc l'écriture de la similitude est :

$$z' = \frac{1}{2}iz + b$$

Comme  $I\left(-\frac{1}{2} + i\right)$  est l'image de  $A$ , on en déduit :

$$b = z_I - \frac{1}{2}iz = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

On obtient l'écriture :  $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

- b) On résout l'équation au point fixe :

$$\omega = \frac{1}{2}i\omega - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$2\omega = i\omega - 1 + i$$

$$\omega(2 - i) = 1 + i$$

$$\omega = \frac{-1 + i}{2 - i} = \frac{(-1 + i)(2 + i)}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$

