Contrôle de mathématiques

Mardi 24 janvier 2012.

Exercice 1

Question de cours. (4 points)

1) Enoncer le critère d'arrêt des nombres premiers.
   Application : Montrer que 271 est un nombre premier. On expliquera clairement la procédure utilisée.
2) Quel est le nombre de diviseurs de 960. On citera le théorème utilisé et on détaillera le calcul.
3) Montrer qu'un entier admet un nombre impair de diviseurs si, et seulement si, c'est un carré.

Exercice 2

« Les zéro de 1000 ! » (4,5 points)

L'exercice a pour but de déterminer par combien de zéros se termine le nombre 1000 ! (factorielle 1000 et non « mille points d'exclamation »)

On rappelle que : $1000! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 1000$

1) Montrer qu'il existe des entiers p et q ($p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ et un entier N premier avec 10 tels que :
$$1000! = 2^p \times 5^q \times N$$
2) On justifiera clairement les questions suivantes :
   a) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5 ?
   b) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5^2 ?
   c) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5^3 ?
   d) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5^4 ?
   e) En déduire alors que $q = 249$
3) Établir que $p > q$ et que le nombre cherché est q

Exercice 3

Trouver un nombre premier (3 points)

On considère un entier n tel que $n^2 = 17p + 1$ où p est premier.

1) Ecrire $17p$ comme le produit de deux facteurs.
2) Citer le théorème de Gauss appliqué aux nombres premiers
3) En déduire n puis p.

Exercice 4

Nombre de diviseurs (3 points)

Un nombre n s'écrit $2^{\alpha}3^{\beta}$. Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n

1) Montrer que l'on a : $\beta(\alpha - 1) = 4$

2) En déduire les trois valeurs possibles pour n.

Exercice 5

Vrai-Faux (1 points)

Pour la proposition suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Proposition : « Pour tout entier naturel k ($2 \leqslant k \leqslant n$), le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier. »

Exercice 6

Trouver un entier (1.5 points)

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

Exercice 7

Égalité de Sophie Germain (3 points)

1) Démontrer l'égalité dite de « Sophie Germain» :

$$n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn)$$

2) n est un entier naturel, pour quelles valeurs de n, $n^4 + 4$ est-il premier ?

3) Démontrez que $4^{545} + 545^4$ n'est pas un nombre premier.

***Note : Marie-Sophie Germain (Paris, 1776-1831)**.*
À l'Age de treize ans, Sophie lut d'histoire d'Archimède et décida de devenir mathématicienne. Luttant contre la volonté de ses parents, elle apprit les mathématiques en cachette en lisant Newton et Euler, puis s'interessa à la théorie des nombres à travers les ouvrages de Legendre et Gauss. Redoutant que son travail ne soit ignoré parce qu'elle était une femme, elle leur écrivit sous le pseudonyme de - M. Le Blanc - et entretint avec eux des correspondances mathématiques durant plusieurs années. À partir de 1808, elle se consacra à l'étude des surfaces élastiques en vibration.