Contrôle de mathématiques

Mardi 9 avril 2013.

EXERCICE 1

Identité remarquable **(4 points)**

On donne les deux matrices suivantes : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

1) Calculer les quantités : $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2$ et $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$. *(On détaillera les calculs)*
2) L'égalité : $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ est-elle vérifiée ? Pourquoi ?

EXERCICE 2

Marice et système **(5 points)**

1) **M** est une matrice carrée d'ordre 2 :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On considère l'algorithme ci-contre.

a) Que calcule cet algorithme ?

b) Préciser la signification de l'affichage « impossible ».

c) Tester cet algorithme pour : $a = 3, b = 2, c = 2, d = 3$

<u>**Variables**</u> a, b, c, d, L_1(liste), L_2(liste)
<u>**Initialisation**</u>
Effacer liste L_1, liste L_2
Lire a, b, c, d
<u>**Traitement**</u>
$ad - bc \to \det$
Si $\det \neq 0$
  $\dfrac{d}{\det} \to L_1(1)$, $\dfrac{-b}{\det} \to L_1(2)$
  $\dfrac{-c}{\det} \to L_2(1)$, $\dfrac{a}{\det} \to L_2(2)$
  Afficher L_1, L_2
Sinon
  Afficher "impossible"
FinSi

2) Pour se rendre à son travail, une personne emprunte une route qui monte sur x km, puis descend sur y km. Sa vitesse moyenne en montée est de 60 km.h^{-1}, et en descente de 90 km.h^{-1}.
Elle met alors 12 minutes pour arriver sur son lieu de travail, et 13 minutes le soir pour rentrer chez elle.

a) Prouver que déterminer, les longueur x et y revient à résoudre l'équation matricielle : $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$ où :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 36 \\ 39 \end{pmatrix}$$

b) Utiliser l'algorithme de la question 1), pour résoudre cette équation.

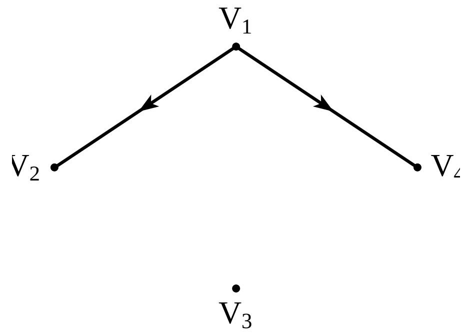
c) En déduire la distance entre le domicile et le lieu de travail de cette personne.

EXERCICE 3

Trafic aérien **(4 points)**

On considère quatre villes V_1 , V_2 , V_3 , V_4 dans un pays où le traffic aérien est encore très réduit : il existe seulement un vol direct de V_1 vers V_2 et vers V_4 , de V_2 vers V_3 , de V_3 vers V_1 et vers V_4 , de V_4 vers V_2

1) Recopier et compléter le graphe suivant.
2) Écrire la matrice **M** associé au graphe suivant. On prendra les villes dans leur ordre de numérotation.
3) Donner, à l'aide de votre calculatrice, $\mathbf{M}^2$, $\mathbf{M}^3$ et $\mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \mathbf{M}^3$.
4) Existe t-il au moins un vol de chaque ville V_i vers chaque ville V_j, avec $i \neq j$, comportant au plus deux escales ? Pourquoi ?



EXERCICE 4

Part de marché **(7 point)**

Dans un pays, deux opérateurs de téléphonie mobile AFR et BFM se partagent le marché. En 2005, AFR en controlait 80 % et BFM 20 %. Mais la concurrence fait rage. On a observé, dans les années suivantes, que d'une année sur l'autre :

- 60 % de la clientèle de AFR lui reste fidèle, tandis que 40 % passe chez BFM.
- 70 % de la clientèle de BFM lui reste fidèle, tandis que 30 % passe chez AFR.

Ces proportion sont stables ; il n'y a pas de fuite de clientèle vers des opérateurs étrangers, et il n'y a pas d'abandon de consommation de ces produits.

Pour tout naturel n, on note respectivement a_n et b_n les part de marché de AFR et BFM en l'année $(2005 + n)$. Ainsi $a_0 = 0,8$ et $b_0 = 0,2$

1) **Ecriture matricielle**. Traduire, avec les données, le système donnant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n
2) **Suite de matrice**. On pose $(\mathbf{U}_n)$ la suite de matrice colonne telle que : $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   a) Traduire le système d'équation à l'aide d'une notation matricielle du type $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n$.
   b) En déduire $\mathbf{U}_n$ en fonction de $\mathbf{U}_0$. A l'aide votre calculatrice donner $\mathbf{U}_{15}$ (parts de marché respectives de AFR et BFM en 2020).
3) **Expresion de $\mathbf{U}_n$**.
   a) De la relation $a_n + b_n = 1$, déterminer les matrices **D** et **E** telles que : $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{D}\mathbf{U}_n + \mathbf{E}$ où **D** est une matrice diagonale et **E** une matrice colonne
   b) Déterminer la matrice colonne **C** telle que : $\mathbf{C} = \mathbf{D}\mathbf{C} + \mathbf{E}$
   c) On pose la suite de matrice $(\mathbf{X}_n)$ telle que : $\mathbf{X}_n = \mathbf{U}_n - \mathbf{C}$. Montrer que : $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{D}\mathbf{X}_n$.
   d) En déduire alors $\mathbf{X}_n$ puis $\mathbf{U}_n$ en fonction de n, a_0 et b_0.
   e) Montrer alors que $(\mathbf{U}_n)$ converge vers **C**.