Correction contrôle de mathématiques
Du mardi 17 décembre 2013

EXERCICE 1

ROC et questions de cours **6 points**

1) a) **Théorème de Bezout :** « Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$ »

b) Il suffit de trouver une combinaison linéaire de a et b judicieuse pour éliminer n :

$$(-7)a + (9)b = -63n - 35 + 63n + 36 = 1$$

Il existe donc un couple $(-7; 9)$ tel que $-7a + 9b = 1$ d'après le théorème de Bezout, les nombres a et b sont premiers entre eux, pour tous n

2) a) **Théorème de Gauss :** « Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c. »

Démonstration :

- Si a divise le produit bc, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $bc = ka$
- Si a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$

En multipliant par c, on a : $acu + bcv = c$ or $bc = ka$, donc : $ac + kav = c$ soit $a(c + kv) = c$.

Donc a divise c.

b) Soit (E) : $3(x-1) = 5y$

- 5 divise $3(x-1)$ or $\text{pgcd}(5; 3) = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, 5 divise $(x-1)$. On a donc : $x - 1 = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$ soit $x = 1 + 5k$, $k \in \mathbb{Z}$
- En remplaçant $x - 1 = 5k$ dans (E), on a : $y = 3k$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Comme $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ donc $1 + 5k \geqslant 0$ et $3k \geqslant 0$ soit $k \geqslant 0$

L'ensemble des couples d'entiers naturels $(x; y)$ solution de (E) sont du type :

$$\begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

3) a) **Corollaire du théorème de Bezout :** « L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si, et seulement si, c est un multiple du $\text{pgcd}(a, b)$. »

b) D'après ce corollaire :

- (E_1) : $9x - 6y = 2$ n'admet pas de solution entière car $\text{pgcd}(9, 6) = 3$ et 2 non multiple de 3.
- (E_2) : $5x + 7y = 4$ admet des solutions entières car $\text{pgcd}(5; 7) = 1$ et 4 est un multiple de 1

EXERCICE 2

Application du cours **4 points**

1) On a :

$$\begin{aligned} 4\,935 &= 517 \times 9 + 282 \\ 517 &= 282 \times 1 + 235 \\ 282 &= 235 \times 1 + 47 \\ 235 &= 47 \times 5 \qquad \text{pgcd}(4\,935; 517) = 47 \end{aligned}$$

On a alors : $\text{ppcm}(4\,935; 517) = \dfrac{4\,935 \times 517}{47} = 54\,285$

2) **Faux :** L'égalité de Bezout n'est qu'une simple implication. Soit un contre-exemple :

Soit les nombres 5 et 2, on a : $5 \times 1 + 2 \times (-1) = 3$ et pourtant $\text{pgcd}(5; 2) = 1$

3) **Faux :** On cherche les racines de : $x^2 - 52x + 480 = 0$

$\Delta = 52^2 - 4 \times 480 = 2\,704 - 1\,704 = 784 = 28^2$

On obtient deux racines : $\dfrac{52 + 28}{2} = 40$ et $x_2 = \dfrac{52 - 28}{2} = 12$

Or le ppcm est un multiple du pgcd et 40 n'est pas multiple de 12.

Exercice 3

Équation diophantienne **4 points**

1) On a : $8 \times 1 - 5 \times 1 = 3$. Donc le couple $(1; 1)$ est solution de (E)

Soit (x, y) une solution de (E), on a donc le système suivant : $\begin{cases} 8x - 5y = 3 \\ 8 \times 1 - 5 \times 1 = 3 \end{cases}$

En soustrayant termes à termes, on obtient : $8(x - 1) - 5(y - 1) = 0$ soit $8(x - 1) = 5(y - 1)$ (E').

5 divise $8(x - 1)$ et $\text{pgcd}(5; 8) = 1$, d'après le théorème de Gauss, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - 1 = 5k$

En remplaçant dans (E'), on obtient alors : $y - 1 = 8k$

Les solutions (x, y) de l'équation (E) sont de la forme : $\begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = 1 + 8k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

2) On a : $8p - 5q = (m - 1) - (m - 4) = m - 1 - m + 4 = 3$

Donc le couple $(p; q)$ est solution de (E).

3) Comme $(p; q)$ vérifie l'équation (E), on a : $p = 1 + 5k$ donc $m = 8p + 1 = 9 + 40k$

On veut que $m > 2\,000$ donc $9 + 40k > 2\,000$ soit $k > \dfrac{2\,000 - 9}{40}$ soit $k > 49,775$

Le plus petit entier m supérieur à 2 000 est obtenu pour $k = 50$ soit $m = 9 + 40 \times 50 = 2\,009$

Exercice 4

Théorème chinois **6 points**

1) a) 19 et 12 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bezout, il existe un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $19u + 12v = 1$

b) De $19u + 12v = 1$, on a : $12v = 1 - 19u$ et $19u = 1 - 12u$

- $n_0 = 6 \times 19u + 13 \times 12v = 6 \times 19u + 13 \times (1 - 19u) = 19u(6 - 13) + 13$ donc $n_0 \equiv 13\,[19]$
- $n_0 = 6 \times 19u + 13 \times 12v = 6 \times (1 - 12v) + 13 \times 12v = 6 + 12v(-6 + 13)$ donc $n_0 \equiv 6\,[12]$

c) Une solution évidente à l'équation $19u + 12v = 1$ est $(-5, 8)$ car :

$$19 \times (-5) + 5 \times 12 = -95 + 96 = 1$$

On obtient alors : $n_0 = 6 \times 19 \times (-5) + 13 \times 12 \times 8 = -570 + 1\,248 = 678$

1) a) Comme n et n_0 sont deux élément de $\mathscr{S}$, alors $n - n_0$ est divisible par 19 et 12. Comme 19 et 12 sont premier entre eux, d'après le corollaire du thérème de Gauss, $19 \times 12 = 228$ divise $n - n_0$. On a donc : $n - n_0 \equiv 0\ [228]$

b) Si $n_0 = 678$, et $678 = 228 \times 3 - 6$, alors $n_0 \equiv -6\ [228]$
Donc d'après la question précédente, $n - 678 \equiv n + 6\ [228]$ est divisible par 228, et donc

$$n = -6 + 228k \quad k \in \mathbb{Z}$$

2) **Application :** Soit n le temps, en années, nécessaire pour que les comètes A et B apparaissent la même année. Compte tenu de leurs périodes respectives, on a :

$$\begin{cases} n - 13 \equiv 0\ [19] \\ n - 6 \equiv 0\ [12] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 13\ [19] \\ n \equiv 6\ [12] \end{cases}$$

Donc n est une solution de $\mathscr{S}$, donc $n = -6 + 228k$.
Comme on cherche le plus petit entier naturel solution de $\mathscr{S}$, on a $k = 1$, ce qui donne $n = -6 + 228 = 222$

Il faudra attendre 222 ans pour que les comètes A et B apparaissent de nouveau la même année.

Remarque : Les comètes A et B étaient apparues la même année, il y a 6 ans.