Lycée Municipal d'Adultes de la ville de Paris **Mardi 24 février 2015**

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

SPÉCIALITÉ

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = -1 + 2i \quad ; \quad b = -2 - i \quad ; \quad c = -3 + i$$

1) a) Placer les points A, B, C sur l'annexe à rendre avec la copie.
   b) Calculer le rapport : $\dfrac{b}{a}$
   c) En déduire la nature du triangle OAB. On justifiera la réponse.
2) On considère l'application f qui à tout point M d'affixe $z \neq b$, associe le point M' d'affixe z' définie par :
$$z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}$$
   a) Déterminer l'affixe c' du point C', image de C par f et placer le point C'.
   b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$ tels que $|z'| = 1$.
   Placer $\mathscr{E}$ sur la figure.
   c) Justifier que $\mathscr{E}$ contient les points O et C.

Partie B

Soit deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par : $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = (1 + i)z_1$

1) Déterminer la forme algébrique de z_2.
2) Déterminer la forme exponentielle de z_1 et de $1 + i$.
   En déduire la forme exponentielle de z_2.
3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

EXERCICE 2 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - 3 - 4\ln x$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction f.
2) Montrer que la dérivée f' vérifie : $f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{x}$
3) Dresser, en justifiant le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$
4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
5) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On appellera α la solution supérieure à 2.
   b) Montrer que $\alpha \in [2\,;\,6]$.
   A l'aide de l'algorithme par dichotomie donner un encadrement à 10^{-3} de la solution α ainsi que le nombre d'itérations nécessaires.

EXERCICE 3 (5 points)

On désire réaliser un portail comme indiqué à l'annexe 1. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + b$$

où b est un nombre réel. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.

1) a) Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
2) Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \frac{5}{4}.$$

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

1) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$F(x) = \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \frac{5}{4}x$$

   est une primitive de la fonction f.
2) En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir l'annexe 2 de l'exercice 3) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

1) Donner l'aire de la planche numéro k.
2) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

Variables : Les nombres X et S sont des nombres réels
Entrées et initialisation
  On affecte à S la valeur 0
  On affecte à X la valeur 0
Traitement
  tant que $X + 0,17 < \ldots$ **faire**
    S prend la valeur $S + \ldots$
    X prend la valeur $X + 0,17$
  fin
Sorties : On affiche S

EXERCICE 4 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Le but de celle partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1) On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n$.
On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 :

$$E = p_1 \times p_{\ 2} \times \cdots \times p_n + 1$$

Démontrer que E est un entier supérieur ou égal â 2, et que E est premier avec chacun des nombres $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n$.

2) En utilisant le fait que E admet un diviseur premier conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$.
On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1) a) Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3								

b) D'après le tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier ?

2) Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

a) Justifier l'égalité : $1 + 2^p + + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \cdots (2^p)^{q-1} = \dfrac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$.

b) En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.

c) En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

3) a) Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

b) Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1)b) ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n^2 - 2$

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0 \mod M_n$.
Cette propriété est admise dans la suite.

1) Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne $M_{\ 5}$ est premier

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

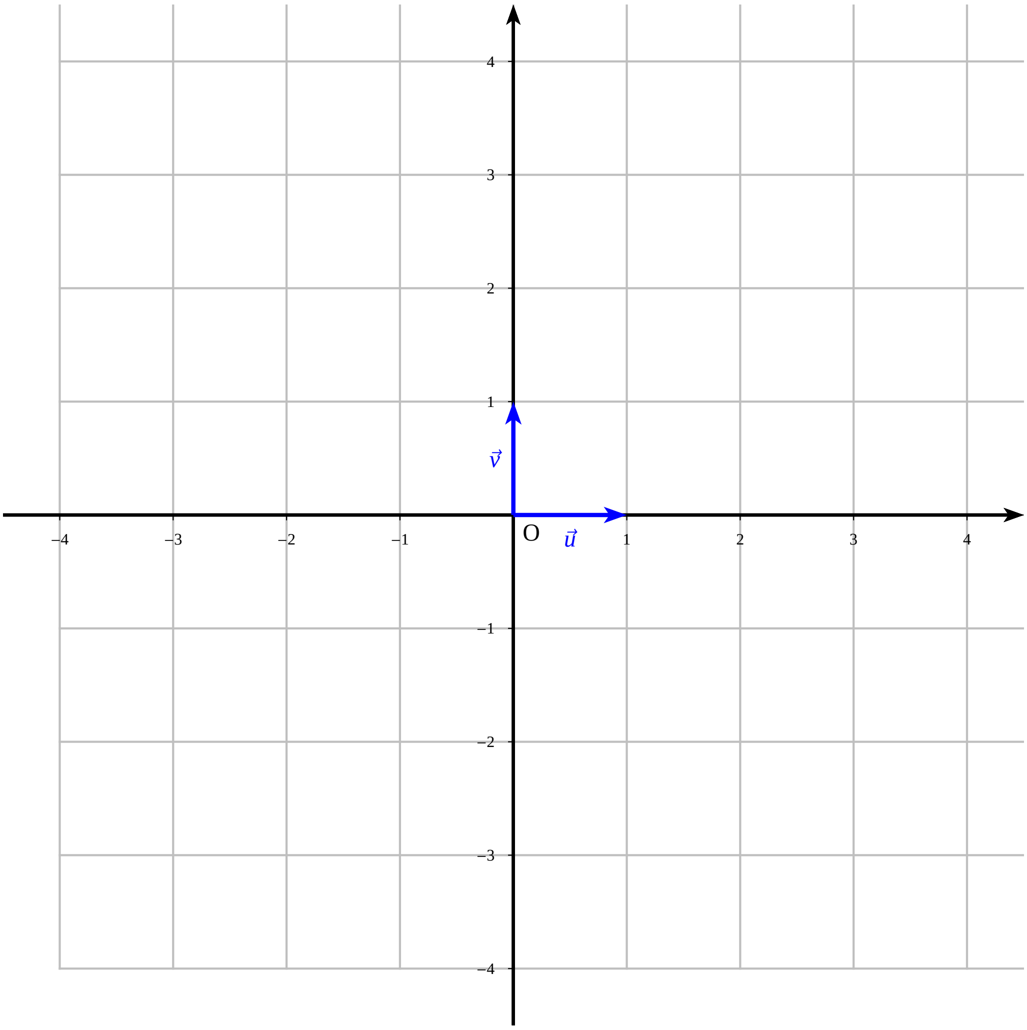
```
Variables : u, M, n et i  entiers naturels
Entrées et initialisation
    u prend la valeur 4
Traitement
    M prend la valeur ......
    pour i allant de 1 à ... faire
        u prend la valeur ...
    fin
Sorties : si M divise u alors
    afficher « M ........ »
sinon
    afficher « M ........ »
fin
```

Recopier et compléter cet algorithme de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue.

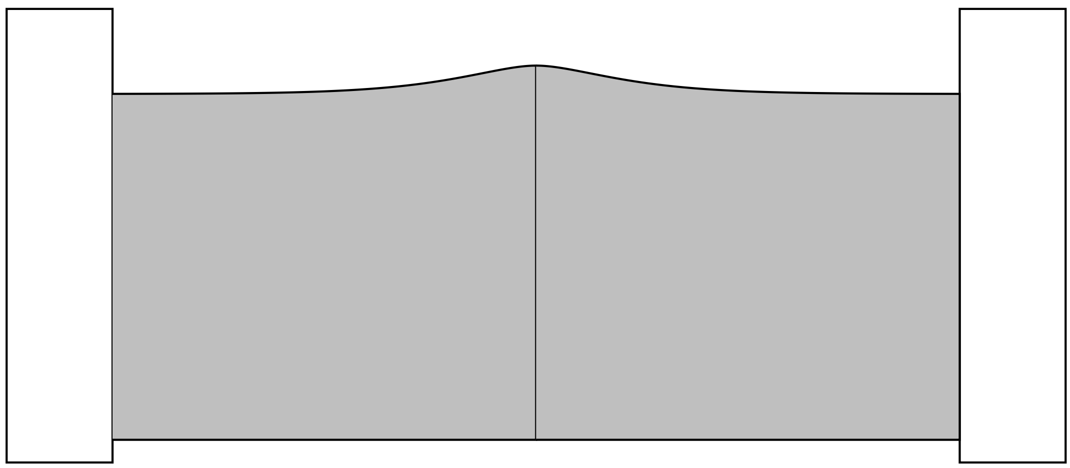
Nom :

Prénom :

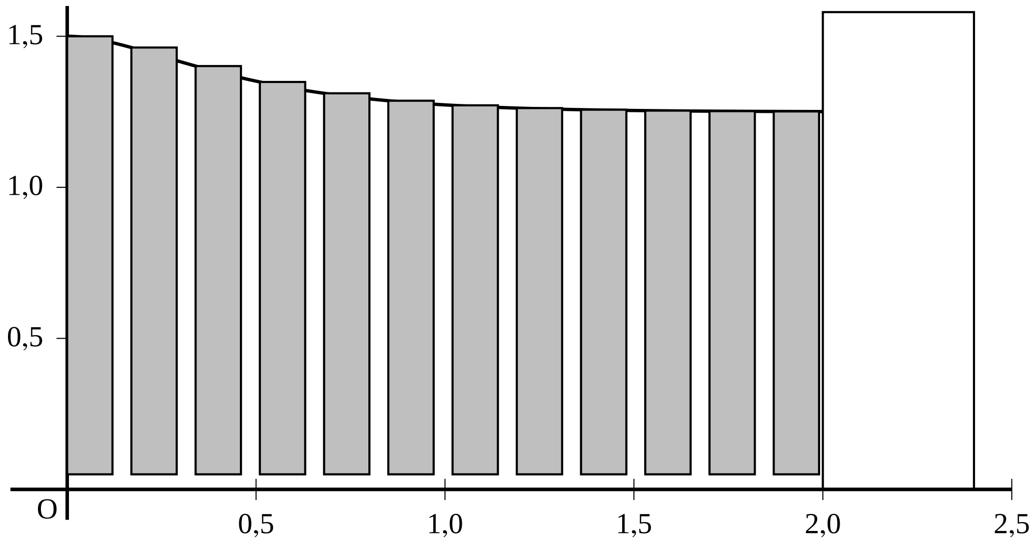
Annexe de l'exercice 1
(À rendre avec la copie)



Annexe 1 de l'exercice 3



Annexe 2 de l'exercice 3



La distance entre le bas du portail et le sol est de 0,05 m.