Contrôle de mathématiques

Jeudi 21 janvier 2016

EXERCICE 1

ROC **(4 points)**

1) Énoncer le théorème de Gauss.
2) Démontrer le théorème de Gauss à l'aide du théorème de Bézout.
3) **Application.** En utilisant le théorème de Gauss, déterminer l'ensemble de couples d'entiers relatif $(a; b)$ tels que : $33a - 45b = 0$.

EXERCICE 2

pgcd et nombres premiers entre eux **(4 points)**

1) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le pgcd de 87 724 et 23 296.
2) Montrer que les nombres $a = 7k + 3$ et $b = 2k + 1$ sont premiers entre eux pour tout entier k.
3) On voudrait savoir pour quelles valeurs de l'entier n, la fraction $q = \dfrac{7n+6}{3n+5}$ est irréductible.
   a) Montrer que $\text{pgcd}(7n + 6\ ;\ 3n + 5)$ est un diviseur de 17.
   b) Pour quelles valeurs de n, les quantités $(7n + 6)$ et $(3n + 5)$ sont-elles divisibles par 17 ?
   c) Conclure sur l'irréductibilité de la fraction q en fonction de n.

EXERCICE 3

Système et équation **(4 points)**

1) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturel $(x; y)$ tels que : $\begin{cases} \text{pgcd}(x; y) = 6 \\ xy = 432 \end{cases}$
2) Soit l'équation (E) : $21x + 47y = 3$
   a) Pourquoi est-on sûr que l'équation (E) admet des solutions entières ?
   b) En remontant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière à l'équation (E_1) : $21x + 47y = 1$. En déduire une solution particulière de l'équation (E).
   c) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solution de (E).

EXERCICE 4

Exercice BAC **(8 points)**

Partie A

On considère l'équation : $51x - 26y = 1$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1) Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple solution.
2) a) Donner un couple solution $(x_0\ ;\ y_0)$ de cette équation.
   b) Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26.
La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y.

1) Coder la lettre N.
2) En utilisant la partie A, déterminer l'entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1\ [26]$.
3) Démontrer que si la lettre correspondant à un entier x est codée par une lettre correspondant à un entier y, alors x est le reste de la division euclidienne par 26 d'une fonction de décodage $f^{-1}(y) = ay + 2$.
4) Déterminer alors la lettre qui est codée par la lettre N. Que constate-t-on ?
5) On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on ?