Contrôle de mathématiques

Jeudi 23 mai 2019

EXERCICE 1

Cartes de pêche **(11 points)**

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » (le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.
On note, pour l'année $2017 + n$:

- ℓ_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- q_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achètent de nouveau une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota achètent une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0,4$ et $q_0 = 0,6$.

On note, pour tout entier naturel n, $P_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la matrice M telle que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = MP_n$.
   On pourra s'aider éventuellement d'un graphe probabiliste.
2) Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.
3) Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1 ○	$M := \{\{0.65, 0, 45\}, \{0.35, 0.55\}\}$ ✓ $M := \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$
2 ○	$P_0 := \{\{0,4\}, \{0,6\}\}$ ✓ $P_0 := \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$
3 ○	$Q := \{\{9, 1\}, \{7,- 1\}\}$ ✓ $Q := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$
4 ○	$T := \{\{1/16, 1/16\}, \{7/16, -9/16\}\}$ ✓ $T := \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$

5 ○	TQ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
6 ○	QT $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7 ○	$D := TMQ$ $\rightarrow D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

En vous appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

a) Justifier que Q est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse.
   On notera Q^{-1} la matrice inverse de Q.
b) Justifier que $M = QDQ^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = QD^nQ^{-1}.$$

4) On admet que, pour tout entier naturel n non nul,

$$M^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9+7\times 0,2^n & 9-9\times 0,2^n \\ 7-7\times 0,2^n & 7+9\times 0,2^n \end{pmatrix}.$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $P_n = M^n P_0$.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0,2^n.$$

5) La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?

EXERCICE 2

Suite de Fibonacci **(9 points)**

On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On considère la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer F^2 et F^3. On détaillera les calculs.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$

3) a) Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que $F^{2n+2} = F^{n+2}\times F^n$, démontrer que

$$u_{2n+2} = u_{n+2}\times u_{n+1} + u_{n+1}\times u_n.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul : $u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2$.

4) On donne $u_{12} = 144$.

Démontrer en utilisant la question **3.** qu'il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont toutes des nombres entiers, l'une étant égale à 12.

Donner la longueur des deux autres côtés.