BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

SPÉCIALITÉ

- *Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité.*
- *La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On prendra pour unité graphique le centimètre.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation à $(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0$.
2) On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 2i$.
   a) Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   b) Faire une figure et placer les points A et B.
   c) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
3) On note F le point d'affixe $z_F = z_A + z_B$.
   a) Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.
   b) En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}\right)$ puis de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OF}\right)$.
   c) Calculer le module de z_F et en déduire l'écriture de z_F sous forme trigonométrique.
   d) En déduire la valeur exacte de : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.
4) Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent :

   pour l'une : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et pour l'autre : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

   Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 (5 points)

Une étude statistique a été menée dans une grande ville de France entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2010 afin d'évaluer la proportion des ménages possédant une connexion internet fixe.

Au 1er janvier 2000, un ménage sur huit était équipé d'une connexion internet fixe et, au 1er janvier 2010, 64 % des ménages l'étaient.

Cette proportion a été modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{1}{1 + k\mathrm{e}^{-at}},$$

où k et a sont deux constantes réelles positives et la variable t désigne le temps, compté en années, écoulé depuis le 1er janvier 2000.

1) a) Déterminer la valeur de k sachant que $g(0) = \dfrac{1}{8}$.
   b) Déterminer la valeur de a sachant que $g(10) = \dfrac{64}{100}$.
   On donnera la valeur exacte de a puis une valeur approchée à 10^{-3}.
2) Dans la suite, on prendra $k = 7$ et $a = 0,25$. On a alors : $g(t) = \dfrac{1}{1 + 7\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}}$.
   a) Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   b) Calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.
   c) Selon cette modélisation, peut-on affirmer qu'un jour, au moins 99 % des ménages de cette ville seront équipés d'une connexion internet fixe ? Justifier la réponse.

3) a) Donner, au centième près, la proportion de foyers, prévue par le modèle, équipés d'une connexion internet fixe au 1er janvier 2018.

Au début de l'année 2018, un sondage donnait 88 % de foyers équipés d'une connexion fixe. Déterminer l'erreur en pourcentage entre le modèle prédictif et les statistiques de 2018.

Que pensez-vous du modèle choisi ?

b) On choisit un autre modèle où la proportion est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = e^{-2{,}1\,\exp(-0.154\,t)} \quad \text{où exp représente la fonction exponentielle}$$

Calculer $f(0)$, $f(10)$ et $f(18)$. Que pensez-vous de ce nouveau modèle ?

EXERCICE 3 **(5 points)**

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$.

a) Montrer que $f(x) = e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

b) En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Quelle interprétation géométrique peut-on faire de I ? On donnera une réponse précise.

2) Un mobile se déplace sur une trajectoire rectiligne à la vitesse $v(t) = \dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{2}t + 1$, où t représente le temps compté en seconde et v la vitesse en m/s.

Quelle sera la vitesse moyenne de ce mobile, en km/h, entre les instant $t_0 = 0$ s et $t_1 = 30$ s ?

3) On veut calculer l'aire de la surface hachurée déterminée par les fonctions f et g entre les abscisses 0 et 5. On donne la figure suivante :

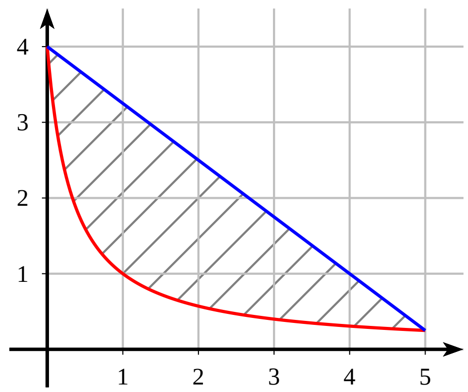
Les fonctions f et g sont définies par

$$f(x) = \frac{4}{3x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{3}{4}x + 4$$

Montrer que l'aire de la surface ainsi définie vaut en unité d'aire

$$\frac{85}{8} - \frac{16}{3}\ln 2$$

On expliquera clairement la méthode utilisée.



EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

On admet que, pour tout entier naturel n : u_n est entier.

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

2) Démontrer que les termes de la suite (u_n) sont alternativement pairs et impairs.

3) L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier.
   Affirmation : « Si p est un nombre premier impair, alors u_p est premier. »

4) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $2u_n = 3^n - 1$.

   b) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que 3^n est congru à 1 modulo 7.

   c) En déduire que u_{2022} est divisible par 7.

5) a) Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite (u_n).

   b) Sans justification, recopier et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m + 1$ par 5					

   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, si u_n est congru à 4 modulo 5, alors u_{n+4} est congru à 4 modulo 5.

   d) Existe-t-il un entier naturel n tel que le reste de la division euclidienne de u_n par 5 soit égal à 2 ?