Sujet Orléans-Tours 1978

EXERCICE 1

Suites **(3 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$.

1) On suppose que (u_n) existe.
   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq -2$
   b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ est arithmétique.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
2) Déterminer la limite de la suite (u_n).
3) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est-il un entier relatif ?

EXERCICE 2

Probabilité **(4 points)**

Deux tireurs 1 et 2 visent une même cible. On appelle :

- A : « le tireur 1 atteint la cible »
- B : « le tireur 2 atteint la cible »

On donne : $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{1}{32}$, $p(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \dfrac{7}{32}$ et $p(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \dfrac{21}{32}$

1) Déterminer la probabilité que le tireur 1 atteigne la cible.
   Même question pour le tireur 2.
2) Les deux événements A et B sont-ils indépendants ?
3) Le tireur 1 tire 5 fois. On admet que les 5 tirs sont indépendants entre eux.
   Quelle est la probabilité que le tireur 1 atteigne la cible trois fois exactement.

EXERCICE 3

Problème : hyperbole **(13 points)**

Partie A

1) a) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\sqrt{3} + 2\sqrt{x^2+1}$.
   Déterminer les limites en $\pm\infty$ de la fonction f.
   b) En remarquant que $f(x) = x\sqrt{3} + 2|x|\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$, montrer que $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes obliques dont on donnera les équations.
   c) Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
   Construire $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.
2) Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative dans$(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la fonction g définie par : $g(x) = x\sqrt{3} - 2\sqrt{x^2+1}$.
   Montrer que $\mathscr{C}_g$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la symétrie de centre O.

3) Soit le point $F(-1 \,;\, \sqrt{3})$ et d la droite d'équation $x - y\sqrt{3} + 2 = 0$.
   On appelle K la projection orthogonale sur d d'un point $M(x \,;\, y)$ du plan.
   On appelle H l'ensemble des points M du plan tels que $MF^2 = 2MK^2$.
   a) Quelle est la nature de la conique H ?
   b) Démontrer que la conique H admet pour équation cartésienne :
   $$y^2 - 2xy\sqrt{3} - (x^2 + 4) = 0$$
   c) Démontrer que $H = \mathscr{C}_f \cup \mathscr{C}_g$.
   Compléter le graphique de $\mathscr{C}_f$ pour obtenir H .

Partie B

Pour tout couple $(\alpha \,;\, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on définit l'application affine $\varphi_{\alpha,\beta}$ du plan dans lui-même, qui à tout point $M(x \,;\, y)$ associe le point M′ de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = \alpha x + (\alpha - \beta)y\sqrt{3} \\ y' = \beta y \end{cases}$$

On appelle G l'ensemble des applications $\varphi_{\alpha,\beta}$ avec $(\alpha \,;\, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

1) Montrer que G muni de la loi $\circ$ est un groupe.
2) Déterminer les applications $\varphi_{\alpha,\beta}$ de G qui sont des involutions.
3) On note $\varphi_{\alpha,\beta}(H)$ l'ensemble des images par $\varphi_{\alpha,\beta}$ des points de H.
   On se propose de déterminer l'ensemble G′ des applications $\varphi_{\alpha,\beta}$ de G telles que $\varphi_{\alpha,\beta}(H) = H$.
   a) Déterminer les couples $(\alpha \,;\, \beta)$ tels que les images A′ et B′ des points $A(-\sqrt{3} \,;\, 1)$ et $B(0 \,;\, 2)$ de H appartiennent à H.
   b) Démontrer que pour les couples $(\alpha \,;\, \beta)$ de la question a), $\varphi_{\alpha,\beta}(H) \subset H$.
   Déduire de la question B 2), que pour ces couples $(\alpha \,;\, \beta)$ on a : $\varphi_{\alpha,\beta}(H) = H$.
4) Caractériser géométriquement les 4 transformations trouvées en B 3).
   Montrer que G′ est un sous-groupe de $(G, \circ)$ en dressant la table d'opérations de G′ pour la loi $\circ$.

Partie C

On considère le point mobile M dont les coordonnées, en fonction du temps $t \in \mathbb{R}$ sont dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ y(t) = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}\, e^t + \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}\, e^{-t} \end{cases}$$

Pour t réel, exprimer e^t et e^{-t} à l'aide de $x(t)$ et $y(t)$.

Déterminer la trajectoire en mouvement.