Sujet Orléans-Tours 1978 - Correction

EXERCICE 1

Suites **(3 points)**

$u_{n+1} = \dfrac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$.

1) a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \neq -2$.

Initialisation : $n = 0,\ u_0 = 1 \neq 2$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \neq -2$, montrons que $u_{n+1} \neq -2$.

Par l'absurde : $u_{n+1} = -2 \ \Rightarrow\ \dfrac{-7u_n - 8}{2u_n + 1} = -2 \ \Rightarrow\ -7u_n - 8 = -4u_n - 2$

$\Rightarrow\ -3u_n = 6 \ \Rightarrow\ u_n = -2$. Contradiction avec HR.

On en déduit alors que $u_{n+1} \neq -2$. La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \neq -2$.

b) $$v_{n+1} = \frac{2u_{n+1}+1}{u_{n+1}+2} = \frac{\dfrac{2(-7u_n-8)}{2u_n+1}+1}{\dfrac{-7u_n-8}{2u_n+1}+2} \overset{\times(2u_n+1)}{=} \frac{-14u_n - 16 + 2u_n + 1}{-7u_n - 8 + 4u_n + 2}$$

$$= \frac{-12u_n - 15}{-3u_n - 6} \overset{\div(-3)}{=} \frac{4u_n+5}{u_n+2}.$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} - v_n = \dfrac{4u_n+5}{u_n+2} - \dfrac{2u_n+1}{u_n+2} = \dfrac{2u_n+4}{u_n+2} = 2.$

La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et de 1er terme $v_0 = \dfrac{2+1}{1+2} = 1$.

On a alors : $v_n = 1 + 2n$. On exprime u_n en fonction de v_n.

$$v_n = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \ \Leftrightarrow\ u_n v_n + 2v_n = 2u_n + 1 \ \Leftrightarrow\ u_n(v_n - 2) = 1 - 2v_n \ \Leftrightarrow$$

$$u_n = \frac{1-2v_n}{v_n-2} = \frac{1-2-4n}{1+2n-2} = \frac{-1-4n}{2n-1} \overset{\times(-1)}{=} \frac{1+4n}{1-2n}.$$

2) Pour $n \neq 0$, $u_n \overset{\div n}{=} \dfrac{\dfrac{1}{n}+4}{\dfrac{1}{n}-2}$, d'où $\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + 4 = 4 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 2 = -2 \end{cases} \overset{\text{quotient}}{\Rightarrow} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -2.$

3) $u_n \in \mathbb{Z}$ si, et seulement si, $(1-2n)$ divise $(1+4n)$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$1 + 4n = k(1-2n) \ \Leftrightarrow\ -2(1-2n) + 3 = k(1-2n) \ \Leftrightarrow\ (1-2n)(k+2) = 3.$

3 divise $(1-2n)$ et $D_3 = \{-3, -1, 1, 3\}$ donc

$1-2n$	-3	-1	1	3
n	2	1	0	-1

Les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour que $u_n \in \mathbb{Z}$ sont : 0 , 1 et 2.

EXERCICE 2

Probabilité **(4 points)**

1) D'après les probabilités totales : $p(\text{A}) = p(\text{A}\cap\text{B}) + p(\text{A}\cap\overline{\text{B}}) = \dfrac{1}{32} + \dfrac{7}{32} = \dfrac{1}{4}$.
$p(\overline{\text{B}}) = p(\text{A}\cap\overline{\text{B}}) + p(\overline{\text{A}}\cap\overline{\text{B}}) = \dfrac{7}{32} + \dfrac{21}{32} = \dfrac{7}{8} \Rightarrow p(\text{B}) = 1 - p(\overline{\text{B}}) = 1 - \dfrac{7}{8} = \dfrac{1}{8}$.

2) $p(\text{A}) \times p(\text{B}) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{32} = p(\text{A}\cap\text{B})$.
Les événements A et B sont indépendants (ce qui semble logique).

3) Soit l'expérience "le tireur 1 tire sur la cible". On appelle succès le tireur 1 atteint la cible avec la probabilité $p = \dfrac{1}{4}$. On réitère 5 fois cette expérience de façon identique et indépendante et l'on appelle X la v.a. associée au nombre de succès. La variable X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}\left(5\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$.

$$p(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{10 \times 9}{4^5} \approx 0,088.$$

En 1978 les calculatrices étaient rares et n'étaient pas autorisées aux épreuves du bac. Les calculs se faisaient à la règle à calcul.

EXERCICE 3

Problème : hyperbole **(13 points)**

Partie A

1) a) $f(x) = x\sqrt{3} + 2|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

- En $+\infty$, on a pour $x > 0$, $f(x) = x\sqrt{3} + 2x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = x\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x^2} = 1\\ \lim\limits_{x\to1} 2\sqrt{x} = 2\end{array}\right. \overset{\text{composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2 \overset{\text{somme}}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3}+2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = 2+\sqrt{3}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right. \overset{\text{produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

- En $-\infty$, on a pour $x < 0$, $f(x) = x\sqrt{3} - 2x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = x\left(\sqrt{3} - 2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x^2} = 1\\ \lim\limits_{x\to1} 2\sqrt{x} = 2\end{array}\right. \overset{\text{composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2 \overset{\text{somme}}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3}-2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{3}-2 < 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right. \overset{\text{produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

b) Montrons que $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes obliques en $\pm\infty$:

Lorsque $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$:

- Si $a = \pm\infty$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique d'axe (Oy).
- Si $a = 0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique d'axe (Ox).
- Si $a \in \mathbb{R}^*$ et si $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b$:
  — Si $b \in \mathbb{R}$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$
  — Si $b = \pm\infty$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique d'axe $y = ax$

- Pour $x > 0$, $\displaystyle\frac{f(x)}{x} = \sqrt{3} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ d'après 1a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{3} + 2$.

$$f(x) - (\sqrt{3}+2)x = 2(\sqrt{x^2+1} - x) = \frac{2(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

- Pour $x < 0$, $\displaystyle\frac{f(x)}{x} = \sqrt{3} - 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ d'après 1a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{3} - 2$.

$$f(x) - (\sqrt{3}-2)x = 2(\sqrt{x^2+1} + x) = \frac{2(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

$\mathscr{C}_f$ admet comme asymptotes :

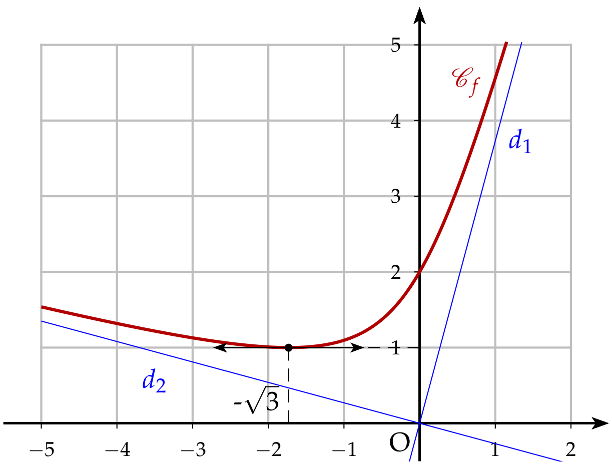
$d_1 \ : \ y = (\sqrt{3} + 2)x$ en $+\infty$ et $d_2 \ : \ y = (\sqrt{3} - 2)x$ en $-\infty$

c) $\displaystyle f'(x) = \sqrt{3} + 2 \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{3} + \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{3x^2+3} + 2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$f'(x) = 0 \overset{x\leqslant 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{3x^2+3} = -2x \overset{\uparrow 2}{\Leftrightarrow} 3x^2 + 3 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \overset{x\leqslant 0}{\Leftrightarrow} x = -\sqrt{3}$$

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{3x^2+3} + 2x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = -x\sqrt{3} - 2\sqrt{x^2+1} = -f(x)$.

On en déduit que $\mathscr{C}_g$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la symétrie de centre O.

3) Définition géométrique d'une conique :

Soit F un point fixe, d une droite fixe et e un réel strictement positif (F $\notin d$).
Pour tout point M du plan, on note K le projeté orthogonal de M sur d.
Une conique de **foyer F** est alors l'ensemble des points M vérifiant $\dfrac{\text{MF}}{\text{MK}} = e$

e est appelé l'**excentricité** et d la **directrice** de la conique.

	$e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
Conique	Ellipse	Parabole	Hyperbole

La perpendiculaire d' à d passant par le foyer F est appelé **axe focal** de la conique.

Distance δ d'un point M$(x_0\,;\,y_0)$ à un droite d d'équation $ax + by + c = 0$:
$$\delta = \text{dist}(\text{M}, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

a) La conique H est une hyperbole car $e = \sqrt{\dfrac{\text{MF}^2}{\text{MK}^2}} = \sqrt{2} > 1$.

b) $\text{MF}^2 = \underbrace{2\text{MK}^2}_{2\times\text{dist}(\text{M},d)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 2 \times \dfrac{(x - y\sqrt{3}+2)^2}{1^2 + (\sqrt{3})^2} \overset{\times 2}{\Leftrightarrow}$

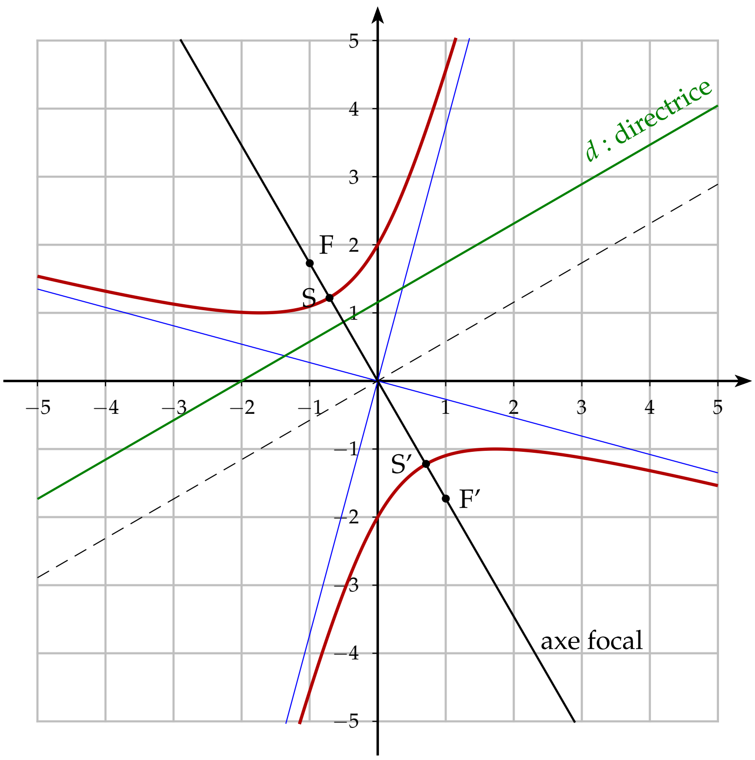
$2x^2 + 4x + 2 + 2y^2 - 4y\sqrt{3} + 6 = x^2 + 3y^2 + 4 - 2xy\sqrt{3} + 4x - 4y\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$-x^2 + y^2 - 4 - 2xy\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2xy\sqrt{3} - (x^2+4) = 0$

c) On résout l'équation du second degré en y :

$\Delta = (-2x\sqrt{3})^2 + 4(x^2+4) = 12x^2 + 4x^2 + 16 = 16(x^2+1) > 0$. Deux sol. :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{2x\sqrt{3} + 4\sqrt{x^2+1}}{2} = x\sqrt{3} + 2\sqrt{x^2+1} = f(x) \\ y_2 &= \frac{2x\sqrt{3} - 4\sqrt{x^2+1}}{2} = x\sqrt{3} - 2\sqrt{x^2+1} = g(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{H} = \mathscr{C}_f \cup \mathscr{C}_g.$$



Partie B

L'ensemble des **applications affines bijectives** du plan dans lui-même est un **groupe** pour la loi $\circ$. Soit f, g, h des applications affines bijectives alors :

- La loi $\circ$ est associative : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$.
- L'application Id est l'élément neutre pour la loi $\circ$: $f \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ f = f$.
- f possède un inverse f^{-1} pour la loi $\circ$: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$

Id : Identité dans le plan : $\mathrm{M}(x, y) \overset{\mathrm{Id}}{\mapsto} \mathrm{M}(x, y)$.
⚠ Ce groupe pour la loi $\circ$ **n'est pas commutatif**.

L'ensemble G pour la loi $\circ$ est un groupe si G est un **sous-groupe** de l'ensemble des applications bijectives du plan si :

- $\mathrm{Id} \in \mathrm{G}$
- $\forall \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in (\mathbb{R}^*)^2, \quad \varphi_{\alpha',\beta'} \circ \varphi_{\alpha,\beta}^{-1} \in \mathrm{G}$. (stabilité pour $\circ$ et passage à l'inverse)

1) $\mathrm{Id} \in \mathrm{G}$, prendre $\alpha = \beta = 1$.

Déterminons $\varphi_{\alpha,\beta}^{-1}$ l'inverse de $\varphi_{\alpha,\beta}$:

$$\begin{cases} x' = \alpha x + (\alpha - \beta) y\sqrt{3} \\ y' = \beta y \end{cases} \overset{\beta \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = \dfrac{1}{\beta} y' \\ x' = \alpha x + \dfrac{\alpha - \beta}{\beta} y' \sqrt{3} \end{cases} \overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = \dfrac{1}{\beta} y' \\ x = \dfrac{1}{\alpha} x' - \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} y' \sqrt{3} \end{cases}$$

L'application $\varphi_{\alpha',\beta'} \circ \varphi_{\alpha,\beta}^{-1}$ est telle que :

$$\begin{cases} x' = \alpha' \left(\dfrac{1}{\alpha} x - \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} \right) y\sqrt{3} + (\alpha' - \beta') \dfrac{1}{\beta} y\sqrt{3} = \dfrac{\alpha'}{\alpha} x + \left(\dfrac{-\alpha'\alpha + \alpha'\beta + \alpha\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha\beta} \right) y\sqrt{3} \\ y' = \beta' \left(\dfrac{1}{\beta} y' \right) = \dfrac{\beta'}{\beta} y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\alpha'}{\alpha} x + \left(\dfrac{\alpha'}{\alpha} - \dfrac{\beta'}{\beta} \right) y\sqrt{3} \\ y' = \dfrac{\beta'}{\beta} y \end{cases} \Rightarrow \varphi_{\alpha',\beta'} \circ \varphi_{\alpha,\beta}^{-1} = \varphi_{\frac{\alpha'}{\alpha}, \frac{\beta'}{\beta}} \in \mathrm{G}$$

$(\mathrm{G}, \circ)$ est un sous-groupe des applications affines bijectives du plan.

2) $\varphi_{\alpha,\beta}$ est une involution si : $\varphi_{\alpha,\beta} \circ \varphi_{\alpha,\beta} = \mathrm{Id}$.

$$\varphi_{\alpha,\beta} \circ \varphi_{\alpha,\beta} = \mathrm{Id} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha \left[\alpha x + (\alpha - \beta) y\sqrt{3} \right] + (\alpha - \beta)(\beta y)\sqrt{3} \\ y = \beta\,(\beta y) \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \alpha^2 x + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) y\sqrt{3} \\ y = \beta^2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 1 \ , \ \beta^2 = 1 \\ (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 1 \ , \ \beta = \pm 1 \\ \alpha = \beta \ \text{ ou } \ \alpha = -\beta \end{cases}$$

Les 4 applications involutives de G sont : $\varphi_{(1\,,\,1)}$, $\varphi_{(-1\,,\,1)}$, $\varphi_{(1\,,-1)}$, $\varphi_{(-1\,,-1)}$.

3) Ensemble G′ des applications $\varphi_{\alpha,\beta}$ de G telles que $\varphi_{\alpha,\beta}(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$.

a) $A' = \left| \begin{array}{l} x' = -\alpha\sqrt{3} + (\alpha-\beta)\sqrt{3} = -\beta\sqrt{3} \\ y' = \beta \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} A' \in H &\Leftrightarrow y'^2 - 2x'y'\sqrt{3} - (x^2+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta^2 - 2(-\beta\sqrt{3})(\beta)\sqrt{3} - (-\beta\sqrt{3})^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow \beta^2 + 6\beta^2 - 3\beta^2 = 4 \Leftrightarrow \beta^2 = 1 \end{aligned}$$

$B' = \left| \begin{array}{l} x' = 2(\alpha-\beta)\sqrt{3} \\ y' = 2\beta \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} B' \in H &\Leftrightarrow y'^2 - 2x'y'\sqrt{3} - (x^2+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\beta^2 - 2(2(\alpha-\beta)\sqrt{3})(2\beta)\sqrt{3} - (2(\alpha-\beta)\sqrt{3})^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow 4\beta^2 - 24\alpha\beta + 24\beta^2 - 12(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = 4 \\ &\Leftrightarrow 16\beta^2 - 12\alpha^2 = 4 \Leftrightarrow 4\beta^2 - 3\alpha^2 = 1 \overset{\beta^2=1}{\Leftrightarrow} \alpha^2 = 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $A', B' \in H \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 = 1$

b) Soit $M(x\,;\,y)$ et $\varphi_{\alpha,\beta}(M)(x'\,;\,y')$, calculons, avec $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ la quantité :

$$\begin{aligned} q &= y'^2 - 2x'y'\sqrt{3} - x'^2 - 4 \\ &= \beta^2y^2 - 2(\alpha x + (\alpha-\beta)y\sqrt{3})(\beta y)\sqrt{3} - (\alpha x + (\alpha-\beta)y\sqrt{3})^2 - 4 \\ &= \beta^2y^2 - 2\alpha\beta xy\sqrt{3} - 6(\alpha-\beta)\beta y^2 - \alpha^2x^2 - 2\alpha(\alpha-\beta)xy\sqrt{3} - 3(\alpha-\beta)^2y^2 - 4 \\ &= y^2(\beta^2 - 6\alpha\beta + 6\beta^2 - 3\alpha^2 + 6\alpha\beta - 3\beta^2) + xy\sqrt{3}(-2\alpha\beta - 2\alpha^2 + 2\alpha\beta) - \alpha^2x^2 - 4 \\ &= y^2(4\beta^2 - 3\alpha^2) - 2\alpha^2xy\sqrt{3} - \alpha^2x^2 - 4 \\ &\overset{\alpha^2=\beta^2=1}{=} y^2 - 2xy\sqrt{3} - x^2 - 4 \end{aligned}$$

Si $M \in H$ alors $q = 0$ donc $\varphi_{\alpha,\beta}(M) \in H$ et donc $\varphi_{\alpha,\beta}(H) \subset H$ (I).

Comme $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ alors $\varphi_{\alpha,\beta}$ est involutive donc en appliquant $\varphi_{\alpha,\beta}$ à l'inclusion (I), on a :

$$\varphi_{\alpha,\beta}(H) \subset H \overset{\varphi_{\alpha,\beta}}{\Rightarrow} H \subset \varphi_{\alpha,\beta}(H) \overset{(I)}{\Rightarrow} \varphi_{\alpha,\beta}(H) = H$$

4) Toute involution du plan est une symétrie

- $\varphi_{(1\,,\,1)} = \mathrm{Id}$
- $\varphi_{(-1\,,\,1)}$ telle que : $\begin{cases} x' = -x - 2y\sqrt{3} \\ y' = y \end{cases}$

  Les points invariants sont tels que $x + y\sqrt{3} = 0$.
  $\varphi_{(-1\,,\,1)}$ est la symétrie par rapport à la droite $x + y\sqrt{3} = 0$ parallèlement à la droite $y = 0$ (axe des abscisses).
- $\varphi_{(1\,,-1)}$ telle que : $\begin{cases} x' = x + 2y\sqrt{3} \\ y' = -y \end{cases}$

  Les points invariants sont tels que $y = 0$.
  $\varphi_{(1\,,-1)}$ est la symétrie par rapport à la droite $y = 0$ (axe des abscisses) parallèlement à la droite $x + y\sqrt{3} = 0$.

- $\varphi_{(-1\,,-1)}$ telle que : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

  $\varphi_{(-1\,,-1)}$ est la symétrie par rapport à l'origine O.

(G′, ∘) est un sous-groupe de (G, ∘) car :

- Id ∈ G′
- D'après B 1), on a $\varphi_{\alpha',\beta'} \circ \varphi_{\alpha,\beta}^{-1} = \varphi_{\frac{\alpha'}{\alpha},\frac{\beta'}{\beta}}$ et $\dfrac{\alpha'}{\alpha}, \dfrac{\beta'}{\beta} \in \{-1\,;\,1\}$

  G′ est stable pour ∘ et passage à l'inverse.

$\circ$	$\varphi_{(1\,,\,1)}$	$\varphi_{(-1\,,\,1)}$	$\varphi_{(1\,,-1)}$	$\varphi_{(-1\,,-1)}$
$\varphi_{(1\,,\,1)}$	$\varphi_{(1\,,\,1)}$	$\varphi_{(-1\,,\,1)}$	$\varphi_{(1\,,-1)}$	$\varphi_{(-1\,,-1)}$
$\varphi_{(-1\,,\,1)}$	$\varphi_{(-1\,,\,1)}$	$\varphi_{(1\,,\,1)}$	$\varphi_{(-1\,,-1)}$	$\varphi_{(1\,,-1)}$
$\varphi_{(1\,,-1)}$	$\varphi_{(1\,,-1)}$	$\varphi_{(-1\,,-1)}$	$\varphi_{(1\,,\,1)}$	$\varphi_{(-1\,,\,1)}$
$\varphi_{(-1\,,-1)}$	$\varphi_{(-1\,,-1)}$	$\varphi_{(1\,,-1)}$	$\varphi_{(-1\,,\,1)}$	$\varphi_{(1\,,\,1)}$

Partie C

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}e^t + \dfrac{1}{2}e^{-t} = x(t) \quad [\times -(2+\sqrt{3})] \\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\,e^t + \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\,e^{-t} = y(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}e^t - \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}e^{-t} = -(2+\sqrt{3})x(t) \quad (1) \\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\,e^t + \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\,e^{-t} = y(t) \quad (2) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \quad 2e^t = -(2+\sqrt{3})x(t) + y(t) \quad \Leftrightarrow \quad e^t = -\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}x(t) + \dfrac{1}{2}y(t)$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}e^t + \dfrac{1}{2}e^{-t} = x(t) \quad [\times(2-\sqrt{3})] \\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\,e^t + \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\,e^{-t} = y(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}e^t + \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}e^{-t} = (2-\sqrt{3})x(t) \quad (3) \\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\,e^t + \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\,e^{-t} = y(t) \quad (2) \end{cases}$$

$$(3)+(2) \quad 2e^{-t} = (2-\sqrt{3})x(t) + y(t) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-t} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}x(t) + \dfrac{1}{2}y(t)$$

On cherche une relation entre $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{aligned} 2e^{-t} = \dfrac{2}{e^t} \quad &\Leftrightarrow \quad (2-\sqrt{3})x(t) + y(t) = \dfrac{4}{(-2-\sqrt{3})x(t) + y(t)} \\ &\Leftrightarrow \quad -x^2(t) + (2-\sqrt{3})x(t)y(t) - (2+\sqrt{3})x(t)y(t) + y^2(t) = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad y^2(t) - 2x(t)y(t)\sqrt{3} - x^(t) - 4 = 0 \end{aligned}$$

La trajectoire est la partie de hyperbole H avec $x(t) \in \mathbb{R}$ et $y(t) > 0$.
La trajectoire est donc la courbe $\mathscr{C}_f$.