Calculs algébriques

1 Calculs de base

⚠ **Sans calculatrice.**

EXERCICE 1

Calculer et simplifier les nombres suivants :

a) $A = \dfrac{-\dfrac{6}{5}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{9}} \div \dfrac{\dfrac{1}{10}-1}{\dfrac{4}{3}+\dfrac{7}{2}}$

b) $B = 1 + \dfrac{2}{2-\dfrac{3}{3+\dfrac{4}{5-\dfrac{3}{2}}}}$

c) $C = \dfrac{1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}}{2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}}$

d) $D = \dfrac{1+\dfrac{1}{5}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{4}{5}}}$

EXERCICE 2

Simplifier et calculer les nombres suivants :

1) $x = \sqrt{0,49}$

2) $y = \sqrt{0,9 \times 10^3}$

3) $z = \sqrt{12}+5\sqrt{75}-7\sqrt{27}$

4) $x = \dfrac{16}{5\sqrt{2}}$

5) $y = \dfrac{15}{2\sqrt{15}}$

6) $z = \dfrac{2-\sqrt{5}}{1-2\sqrt{5}}$

7) $x = \dfrac{4-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}$

8) $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} - \dfrac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}$

9) $x = \sqrt{3-\sqrt{5}} \times \sqrt{3+\sqrt{5}}$

10) $y = \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$

EXERCICE 3

1) Soit $f(x) = (5x-3)^2 - 2(x-1)(5x-3)$.
Résoudre les équations suivantes :
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 3$ c) $f(x) = 15x^2$

2) Soit $g(x) = (5x-3)^2 - (2x-1)^2$
Résoudre les équations suivantes :
a) $g(x) = 0$ b) $g(x) = 8$ c) $g(x) = -26x$.

EXERCICE 4

1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $9(x-3)^2 = x^2 - 4x + 4$ b) $(3x+1)^2 = 2(9x^2-1)$

c) $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x+1}{x-2}$

2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{3x+1}{x+2} \geqslant 0$ b) $(3x+1)^2 \leqslant 2(3x+1)(x+1)$

2 Second degré

2.1 Forme canonique

EXERCICE 5

Déterminer les extremum des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, sans calculer leur dérivée.

a) $f(x) = -3(x-2)^2 + 5$ b) $g(x) = 2x^2 - 6x + 3$

2.2 Équations

EXERCICE 6

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$ 2) $x^2 - 2x + 5 = 0$

3) $5x^2 - 10x + 5 = 0$ 4) $3x^2 - 6x + 8 = x^2 + 2x + 10$

5) $\dfrac{2x-1}{x-5} = \dfrac{x+1}{x-3}$

EXERCICE 7

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = -4x + 2$

Déterminer les intersections et les positions des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentations respectives des fonction f et g.

EXERCICE 8

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $4x^4 - 7x^2 + 3 = 0$ b) $4x - 7\sqrt{x} + 3 = 0$ c) $4x^2 - 7|x| + 3 = 0$

EXERCICE 9

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. On pourra poser $X = x + \dfrac{1}{x}$

EXERCICE 10

Soit l'équation : $3x^2 - ax + 6 = 0$ (a étant un réel fixé). Déterminer le réel a tel que 2 soit solutions de l'équation ; en déduire l'autre solution.

2.3 Équations paramétriques

EXERCICE 11

Soit (E_m) l'équation : $(m-1)x^2-(2m+3)x+m=0$, avec $m \in \mathbb{R}$.

a) Discuter, selon les valeurs du paramètre m, le nombre de solution de l'équation (E_m).

b) Déterminer l'ensemble A des réels m pour lesquels l'équation (E_m) admette deux solutions positives.

c) Déterminer l'ensemble B des réels m pour lesquels l'équation (E_m) admette deux solutions négatives.

d) Déterminer l'ensemble C des réels m pour lesquels l'équation (E_m) admette deux solutions de signes contraires.

EXERCICE 12

Soit (E_m) l'équation : $(3m-1)x^2+(m+6)x-m-9=0$, avec $m \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer l'ensemble A des réels m pour lesquels l'équation (E_m) admette deux solutions strictement positives.

b) Déterminer l'ensemble B des réels m pour lesquels l'équation (E_m) admette deux solutions strictement négatives.

2.4 Somme et produit des racines

EXERCICE 13

Soit l'équation (E) : $3x^2+7x-2=0$.

1) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions x_1 et x_2

2) On pose $S=x_1+x_2$ et $P=x_1x_2$.
Après avoir exprimé les quantités suivantes en fonction de S et P, calculer :

a) $x_1^2+x_2^2$ b) $x_1^3+x_2^3$ c) $(x_1+x_2)^2$

d) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ e) $\dfrac{1}{x_1-2}+\dfrac{1}{x_2-2}$

EXERCICE 14

Soit l'équation (E_m) : $x^2-(2m+3)x+m^2+5=0$ avec $m \in \mathbb{R}$

1) Déterminer les valeurs du paramètre m pour lesquels l'équation (E_m) admette deux solutions x_1 et x_2.

2) a) Déterminer la valeur de m tel que : $x_1^2+x_2^2=53$

b) Déterminer la valeur de m tel que : $|x_1-x_2|=13$

2.5 Équations irrationnelles

EXERCICE 15

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes en soignant particulièrement les conditions de résolution.

a) $\sqrt{x+2} = 3x - 4$

b) $\sqrt{3x^2 - 11x + 21} = 2x - 3$

c) $2x + 1 + \sqrt{-7x - 5} = 0$

d) $x + \sqrt{2x + 28} = 26$

e) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3x - 5} = 7$

f) $\sqrt{5x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{3x+1}$

2.6 Inéquations

EXERCICE 16

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1) $2x^2 + 3x + 1 \geqslant 0$

2) $-2x^2 + x - 3 \geqslant 0$

3) $-x^2 + 8x - 16 \geqslant 0$

4) $\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} \leqslant 0$

5) $\dfrac{2x+1}{x-2} \leqslant \dfrac{x+1}{x+3}$

EXERCICE 17

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{-x^2 + 2x + 5} > 0$

2) $\dfrac{3x^2 - 6x + 4}{2x^2 - x - 1} > 2$

3) $\dfrac{2x-3}{x-2} - \dfrac{4x-1}{3x^2 - 2x - 8} < \dfrac{65}{32}$

4) $2 < (2x-3)^2 \leqslant \dfrac{25}{4}$

EXERCICE 18

1) Déterminer la valeur du réel m pour que les inéquations suivantes soient vérifiées pour tout x réel.

   a) $mx^2 - (2m+1)x + m < 0$

   b) $(m+1)^2x^2 - 2x + 2m + 1 \geqslant 0$

2) Déterminer la valeur du réel m pour que l'équation suivante ait deux solutions, x_1 et x_2 telles que $x_1 < 2 < x_2$

$$(m-1)^2x^2 - mx + 3m + 1 = 0$$

2.7 Systèmes

EXERCICE 19

Déterminer les couples $(x; y)$ tels que :

1) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 - xy = 13 \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy^2 + x^2y = -30 \\ xy + x + y = -13 \end{cases}$

2.8 Équations du 3e degré

EXERCICE 20

Soit l'équation (E) : $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$

a) On pose $X = x + 2$. Montrer que (E) devient (E_1) : $X^3 - 3X + 2 = 0$

b) Déterminer une solution évidente α de l'équation (E_1).

c) À l'aide d'une division euclidienne déterminer a, b, c tels que :

$$X^3 - 3X + 2 = (X - \alpha)(aX^2 + bX + c)$$

d) Déduire alors toutes les solutions de (E_1) puis de (E).

3 Pivot de Gauss

EXERCICE 21

Résoudre les systèmes 3 x 3 à l'aide du pivot de Gauss :

a) $\begin{cases} x + 3y + z = 30 \\ 2x - y - z = -3 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 5y + 3z = 26 \\ x - 2y - 3z = -32 \\ 3x + 7y - 6z = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 15 \\ 5x + y - z = 31 \\ 7x - 2y - 5z = 46 \end{cases}$

EXERCICE 22

Un rentier fait trois parts de sa fortune, qu'il place à 3 %, 4 % et 5 %. Il obtient ainsi un revenu annuel de 322 400 €. Il modifie ensuite son placement : la première et la troisième part sont placé à 4 %, la seconde à 5 %. Le revenu annuel est alors de 377 920 €. Quelles sont ces trois parts, leur total s'élevant à 8 448 000 € ?

4 Calcul de dérivées

EXERCICE 23

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f en précisant le domaine de validité de vos calculs.

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

2) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

5) $f(x) = (3x-1)^2(1-2x)^3$

6) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

7) $f(x) = \cos x \sin x$

8) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

9) $f(x) = \sin^3 x$

10) $f(x) = \tan(3x)$

11) $f(x) = \tan^2 x$

12) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x}$