Compléments sur les nombres complexes

I Révision terminale

EXERCICE 1

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.
On justifiera la réponse.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1) Une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + i$ est :
a) 3 **b)** i **c)** $3 + i$

2) Soit z un nombre complexe ; $|z + i|$ est égal à :
a) $|z| + 1$ **b)** $|z - 1|$ **c)** $|i\overline{z} + 1|$

3) Soit $z \neq 0 \in \mathbb{C}$, d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :
a) $-\dfrac{\pi}{3} + \theta$ **b)** $\dfrac{2\pi}{3} + \theta$ **c)** $\dfrac{2\pi}{3} - \theta$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le complexe $\left(\sqrt{3} + i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :
a) $n = 3$ **b)** $n = 6k + 3,\ k \in \mathbb{N}$ **c)** $n = 6k,\ k \in \mathbb{N}$

5) Soient deux points $\mathrm{A}(i)$ et $\mathrm{B}(-1)$.
L'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ vérifiant : $|z - i| = |z + 1|$ est :
a) la droite (AB) **b)** le cercle de diamètre [AB] **c)** la droite $d \perp (\mathrm{AB})$ passant par O

6) Soit le point $\Omega(1 - i)$.
L'ensemble des points $\mathrm{M}(x+iy)$ vérifiant $|z-1+i| = |3-4i|$ a pour équation :
a) $y = -x + 1$ **b)** $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ **c)** $z = 1 - i + 5\mathrm{e}^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}$

7) Soient les points $\mathrm{A}(4)$ et $\mathrm{B}(3i)$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est :
a) $1 - 4i$ **b)** $-3i$ **c)** $7 + 4i$

8) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z - 2}{z - 1} = z$ est :
a) $\{1 - i\}$ **b)** L'ensemble vide **c)** $\{1 - i\ ;\ 1 + i\}$

EXERCICE 2

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soient les points A et B d'affixes respectives -1, $\dfrac{1}{2}i$.
Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe $z' = f(z)$ tel que :

$$f(z) = \frac{z-i-1}{z+1}$$

1) On pose $z = x + iy$. Exprimer $f(z)$ en fonction de x et de y.
2) Déterminer l'ensemble de points M tels que $f(z)$ soit un réel.
3) Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur.

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit un point M d'affixe z. Déterminer l'ensemble des points M tel que :

1) $|z-2-i| = |z+3+4i|$
2) $|\overline{z}-2i| = |z+2|$
3) $|(1+i)z-2i| = 2$

II Équations du second degré à coefficients complexes

Exercice 5

1) a) Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

   $z_1 = 8i$ $\qquad\qquad$ $z_2 = 2-2i\sqrt{3}$

   b) En déduire les « *racines carrés* » des nombres complexes z_1 et z_2 sous la forme exponentielle puis sous la forme algébrique.
2) *Applications* : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations complexes suivantes :
   a) $z^2 - 2(2-i)z + 3(1-2i) = 0$
   b) $z^2 - (1+i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$

III Trigonométrie

Exercice 6

1) Rappeler les formules de duplication ie. $\cos 2a$ en fonction de $\cos a$ et $\sin 2a$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.
2) Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0\,;\,\pi[$
   a) À l'aide des formule de duplication, déterminer le module et un argument de $1+z$. On introduira l'angle moitié $\dfrac{\theta}{2}$.
   b) En déduire le module et un argument de $1+z+z^2$.

IV Autour des formules d'Euler et de Moivre

Exercice 7

1) À l'aide des formules d'Euler établir que pour tous réels a et b :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

2) On pose $S = \cos p + \cos q$ et $S' = \sin p + \sin q$.
   a) Montrer que pour tous réels p et q :

$$S + iS' = e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)} \times \left(2\cos\frac{p-q}{2}\right)$$

   b) En déduire une transformation en produit des sommes S et S'.

3) À l'aide de la formule de Moivre, et du développement de $(a+b)^3$, exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$

Exercice 8

1) À l'aide de la formule du binôme, développer $(a+b)^4$
2) En déduire $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$
3) Montrer, sans calcul, que l'équation $8X^4 - 8X^2 + 1 = 0$ admet quatre solutions réelles dans $[-1\,;\,1]$

Exercice 9

Un classique

1) a) q étant différent de 1, rappeler la formule donnant la somme $\sum_{k=0}^{n} q^k$
   b) Montrer que $e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\frac{\theta}{2} \times e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) On pose : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$
   a) Calculer $S_1 + iS_2$
   b) En déduire alors S_1 et S_2

Exercice 10

Linéarisation

1) Développer à l'aide de la formule du binôme $(a+b)^4$
2) Linéariser $\cos^4 x$
3) En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$

V Transformation de $a \cos x + b \sin x$

EXERCICE 11

Exprimer à l'aide d'un cosinus les expressions suivantes :

1) $\cos x - \sqrt{3} \sin x$
2) $5 \cos x - 5 \sin x$
3) $\cos 3x + \sin 3x$
4) $3 \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x$
5) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos 4x - \dfrac{1}{3} \sin 4x$
6) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$

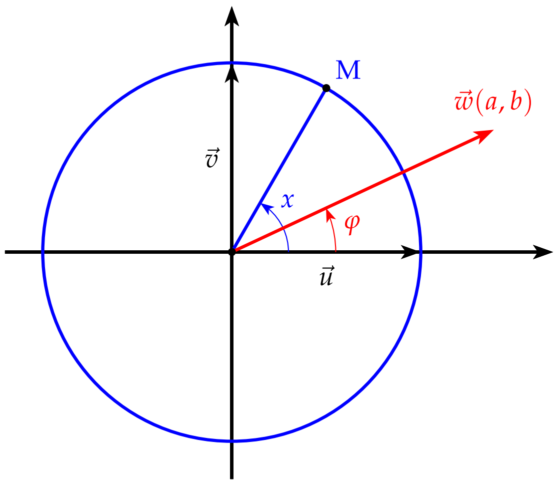
EXERCICE 12

En mettant en jeu $\cos 2x$ et $\sin 2x$, résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos x(\cos x - \sin x) = 1$

EXERCICE 13

Interprétation géométrique de $a \cos x + b \sin x$

Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point M sur le cercle unité tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = x$ et $\vec{w}$ le vecteur non nul de coordonnées $(a\,;\,b)$.
On pose $r = ||\vec{w}||$ et $\varphi = (\vec{u}, \vec{w})$



1) Interpréter $a \cos x + b \sin x$ comme un produit scalaire.

2) En déduire que :

   $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi)$

VI Autour de la racine n-ième de l'unité

EXERCICE 14

Pour quelles valeurs de n les nombres suivants sont-ils des racines n-ième de l'unité.

a) -1 b) i c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE 15

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^6 = -8$
2) Représenter graphiquement les images solutions.
3) Factoriser sur $\mathbb{R}$, le polynôme $x^6 + 8$ en produit de trois facteurs du second degré.

Exercice 16

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = i$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z-i)^4 = (z+i)^4$
4) À partir de la somme des racines 5-ième de l'unité, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$

Exercice 17

Construction d'un pentagone régulier

La construction du pentagone régulier ci-dessous peut être entièrement réalisé à la règle et au compas. L'exercice suivant permet de la justifier.

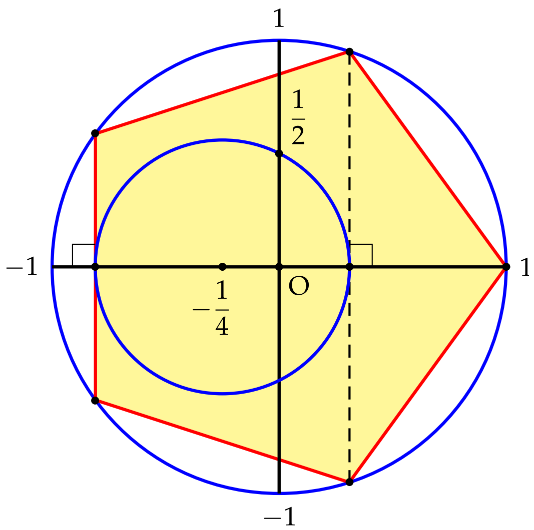
1) $a = \cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $b = \cos\dfrac{4\pi}{5}$

   Montrer que $1 + 2a + 2b = 0$

2) Exprimer ab en fonction de $a + b$.

   En déduire que a et b sont solutions de l'équation : $X^2 + \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{4} = 0$

3) Justifier alors la construction du pentagone régulier.



Exercice 18

1) Déterminer les racines 4-ième de l'unité.
2) Développer, à l'aide du binôme $(1-2i)^4$.
3) En déduire les solutions de l'équation $z^4 = -7 + 24i$

VII Écriture complexe d'une transformation

Exercice 19

Identifier la transformation qui au point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z'.

1) $z' = z + 3 - i$
2) $z' = 5z$
3) $z' = \overline{z}$
4) $z' = -z$
5) $z' = iz$
6) $z' = -\overline{z}$
7) $z' = -iz$
8) $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}\, z$
9) $z' = \left(\dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right) z$
10) $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}\, z$
11) $z' - i = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}(z - i)$