Complément sur les suites. Suites adjacentes

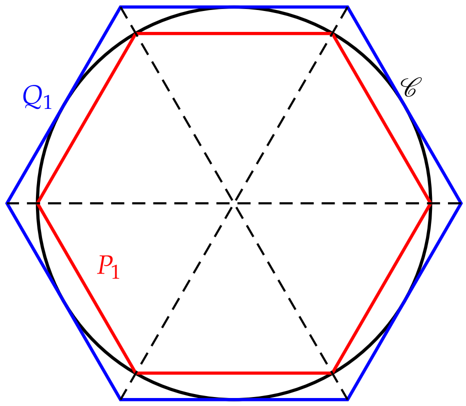
Table des matières

1 Le procédé

Dans un texte intitulé « *De la mesure du cercle* », Archimède imagine la première méthode jamais proposée permettant, en théorie, le calcul de π avec une précision aussi grande qu'on le souhaite. L'exposé suivant suit les idées d'Archimède avec des méthodes modernes.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1 : on construit, pour tout $n \geqslant 1$ deux polygones réguliers P_n, et Q_n , ayant 3×2^n côtés, P_n étant inscrit dans $\mathscr{C}$, et Q_n, exinscrit à $\mathscr{C}$ (voir la figure ci-contre).

Nous admettons que le périmètre du cercle (égal à 2π) est encadré par ceux des deux polygones. Dans la suite, on note p_n et q_n, les demi-périmètres respectifs de P_n et Q_n. Ainsi, $p_n < \pi < q_n$



$n = 1$ (6 côtés)

Ce procédé permet d'encadrer la valeur de π par des intervalles emboîtées de plus en plus fins. On dit que ces deux suites (p_n) et (q_n) ainsi définies sont **adjacentes**.

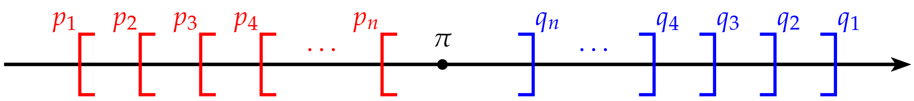
Ces deux suites (p_n) et (q_n) sont initialisées par : $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$.

Puis définies par les relations de récurrence : $q_{n+1} = \dfrac{2p_nq_n}{q_n + p_n}$ et $p_{n+1} = \sqrt{p_nq_{n+1}}$

Pour l'étude de ces suites adjacentes voir le document sur la méthode d'Archimède.

$\pi \approx 3{,}141\,592\,654$

n	p_n	q_n	$q_n - p_n$
1	3	3,464	0,464
2	3,106	3,215	0,109
3	3,132	3,160	0,027
4	3,139	3,146	0,007



2 Suites adjacentes

2.1 Définition

Définition 1 : Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n). On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si, et seulement si,

- (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Exemple : $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ sont deux suites adjacentes, car la première est croissante, la seconde est décroissante et leur différence est nulle.

2.2 Le théorème

Théorème 1 : Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent en une même limite ℓ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$$

Démonstration : Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$.

  Soit la suite $w_n = v_n - u_n$. Étudions les variations de (w_n).

  $$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$

  Or les suites (v_n) et u_n sont respectivement décroissante et croissante donc

  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et $u_{n+1} - u_n > 0 \quad \Rightarrow \quad (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) < 0$

  En conséquence $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} - w_n < 0$, la suite (w_n) est décroissante.

  $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_n \leqslant v_n$.

- Montrons que (u_n) et (v_n) convergent.

  On sait que les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_0 \leqslant v_0 \leqslant v_n$

  donc la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 et la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0, d'après le théorème des suites monotones, (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers ℓ et ℓ'.

- Montrons que (u_n) et (v_n) ont même limite.

  Par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n - \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell' - \ell$

  or $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ donc $\ell = \ell'$

3 Exemple

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) On dit qu'un intervalle I est stable par la fonction f si, et seulement si, $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \in \mathrm{I}$.
   Montrer que $[1\,;2]$ est stable par f.
2) (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$

   a) Représenter la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
      Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
      À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées et respectivement croissante et décroissante.

c) Calculer $v_{n+1} - u_{n+1}$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \; |v_{n+1} - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{4}|v_n - u_n|$.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \; |v_n - u_n| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
Déterminer la valeur exacte de α.

1) f est une fonction rationnelle définie sur $[0\,;2]$ donc dérivable sur $[0\,;2]$:

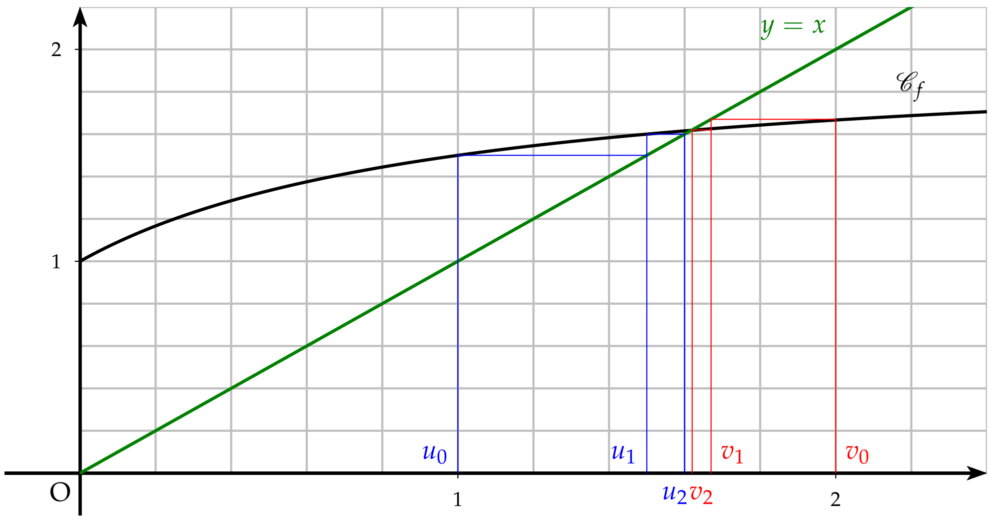
$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

La fonction f est croissante sur $[0\ ;\ 2]$. De la continuité de f sur $[1\ ;\ 2]$, on a

$$f([1\ ;\ 2]) = [f(1)\ ;\ f(2)] = \left[\frac{3}{2}\ ;\ \frac{5}{3}\right] \subset [1\ ;\ 2]$$

L'intervalle $[1\,;2]$ est donc stable par f.

2) a) On obtient la représentation suivante :



Les suites (u_n) et (v_n) semblent converger et être respectivement croissante et décroissante.

b) Montrons par récurrence que les suites (u_n) est (v_n) sont bornées par $[1\,;2]$ et qu'elles sont respectivement croissante et décroissante.

Initialisation : L'intervalle $[1\,;2]$ est stable par f et comme u_0 et v_0 appartiennent à cet intervalle, il en est de même pour u_1 et v_1.

De plus $u_1 = f(u_0) = \dfrac{3}{2}$ donc $u_1 \geqslant u_0$ et $v_1 = f(v_0) = \dfrac{5}{3}$ donc $v_1 \leqslant v_0$

La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit n un entier naturel, supposons que (u_n) et v_n appartiennent à [1 ; 2] et que $u_{n+1} \geqslant u_n$ et $v_{n+1} \leqslant v_n$.

L'intervalle [1 ; 2] est stable par f, comme u_n et v_n appartiennent à cet intervalle, il en est de même pour u_{n+1} et v_{n+1}.
La fonction f est croissante sur $[1\ ;\ 2]$:

- $u_{n+1} \geqslant u_n \quad \Rightarrow \quad f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) \quad \Rightarrow \quad u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$
- $v_{n+1} \leqslant v_n \quad \Rightarrow \quad f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n) \quad \Rightarrow \quad v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, les suite (u_n) et (v_n) sont bornée par [1 ; 2] et sont respectivement croissante et décroissante.

c) Calculons la différence : $v_{n+1} - u_{n+1}$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} = \frac{(2v_n+1)(u_n+1)-(2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)}$$
$$= \frac{2u_nv_n + 2v_n + u_n + 1 - 5u_nv_n - 2u_n - v_n - 1}{(v_n+1)(u_n+1)}$$
$$= \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$$1 \leqslant u_n \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leqslant u_n + 1 \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{u_n+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

De même $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{v_n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ par produit $\dfrac{1}{9} \leqslant \dfrac{1}{(v_n+1)(u_n+1)} \leqslant \dfrac{1}{4}$

On en déduit donc que $\left|\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}\right| \leqslant \dfrac{|v_n-u_n|}{4}$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_{n+1} - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{4}|v_n - u_n|$

d) On pose $w_n = |v_n - u_n|$.

On a montré à la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{w_{n+1}}{w_n} \leqslant \dfrac{1}{4}$, donc :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{w_{k+1}}{w_k} \leqslant \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{w_{k+1}}{w_k} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

or $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{w_{k+1}}{w_k} = \frac{w_n}{w_0}$ (produit télescopique) donc $\dfrac{w_n}{w_0} \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

On en déduit donc :

$$w_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n w_0 \quad \Leftrightarrow \quad |v_n - u_n| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |v_0 - u_0| \quad \Leftrightarrow \quad |v_n - u_n| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

e) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$

D'après la question précédente, on a $-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, donc d'après le **théorème des gendarmes** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$, elles sont donc adjacentes. D'après le **théorème des suites adjacentes** (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite α telle que : $u_0 \leqslant \alpha \leqslant v_0 \quad\Leftrightarrow\quad 1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $[1\,;2]$ et les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite α, d'après le **théorème du point fixe**, la limite α vérifie l'équation $f(\alpha)=\alpha$

$$f(\alpha)=\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2\alpha+1}{\alpha+1}=\alpha \quad\Leftrightarrow\quad 2\alpha+1=\alpha^2+x \quad\Leftrightarrow\quad \alpha^2-\alpha-1=0$$

$\Delta=5$, on ne retient que la solution positive $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Cette limite α n'est autre que le nombre d'or $\phi \approx 1{,}618\,034$.

Remarque : Ces suites convergent très vite vers ϕ, en effet u_6 et v_6 donne une approximation à 10^{-5} de ϕ

n	u_n	v_n	v_n-u_n
0	1	2	1
1	1,5	1,667	0,167
2	1.6	1,625	0,025
3	1,615 385	1,619 048	0,004
4	1,617 647	1,618 182	$5,35.10^{-4}$
5	1,617 978	1,618 056	$7,80.10^{-5}$
6	1,618 026	1,618 037	$1,14.10^{-5}$