Compléments sur les suites
Suites adjacentes

I Encadrement d'une suite

EXERCICE 1

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [k\,;\,k+1]$, on a :
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$$

2) On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que (u_n) diverge.

EXERCICE 2

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 2$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$. (2)

2) Déduire de (2) l'inégalité, pour n entier supérieur ou égal à 2,
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad (3)$$
Interpréter graphiquement les inégalités (2) et (3).

3) Pour n entier supérieur ou égal à 2, calculer $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et montrer que $u_n \leqslant 1$

4) Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ vérifiant $\ell \leqslant 1$.

EXERCICE 3

On considère les suites (u_n) et $v_n)$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\times n}$$

1) Trouver deux réels a et b tels que pour $n > 1$: $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n}$

   En déduire que pour $n > 1$, $v_n = 2 - \dfrac{1}{n}$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que pour $n > 1$, $u_n < v_n < 2$.

   En déduire que la suite (u_n) est convergente.

II Calcul de somme

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes :

1) $S_1 = \sum_{k=1}^{n} 1$ 2) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} n$ 3) $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k$

Exercice 5

À l'aide de sommes télescopiques, calculer les sommes suivantes

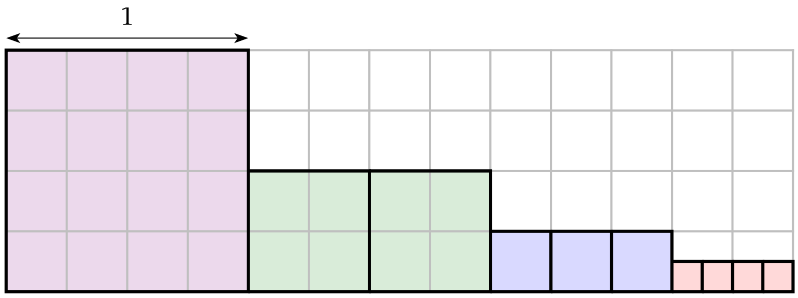
1) $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

⚠ On pourra décomposer en éléments simples : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$

2) $S_2 = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$ 3) $S_3 = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$

Exercice 6

On effectue la construction schématisée ci-dessous :



À l'étape n, on ajoute n carrés, de côtés égaux à la moitié d'un côté du carré de l'étape $(n-1)$.
On désigne par S_n l'aire du domaine obtenue à la n-ième étape.

1) Établir que : $S_n = 1 + 2 \times \dfrac{1}{4} + 3 \times \dfrac{1}{4^2} + \cdots + n \times \dfrac{1}{4^{n-1}}$

   Écrire S_n avec le signe $\sum$

2) Déterminer la formule sommatoire pour : $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$

   Aide : $f(x)$ est la dérivée de ...

3) En déduire une formule explicite pour S_n et calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

   Vérifier le résultat de la limite à l'aide d'un algorithme.

III Suites récurrentes d'ordre 2

EXERCICE 7

Soit la suite (u_n)définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Calculer v_n en fonction de n.
2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   Aide : on pourra calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ de deux manières différentes.
3) Déterminer la limite de la suite (u_n)

EXERCICE 8

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ x_{n+1} - x_n = 0,24\, x_{n-1}$

1) On considère un réel λ non nul, et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
   Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si, et seulement si, λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
   En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

   On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :

   $$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels}$$

2) On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
   Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$

   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.
3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 9

On appelle suite de Fibonacci, la suite (u_n) récurrente à deux termes définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

1) Déterminer les premier termes : u_2, u_3, u_4, u_5, u_6.
2) On pose la suite (a_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \alpha\, u_{n+1} + u_n$.
   a) Montrer que la suite (a_n) est géométrique si et seulement si α est solution de l'équation : $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$.
   b) Montrer que cette équation possède deux solutions α_1 et α_2 tels que : $\alpha_2 < 0 < \alpha_1$.

c) On pose alors les suites (v_n) et (w_n) définies par :

$$v_n = \alpha_1\, u_{n+1} + u_n \quad \text{et} \quad w_n = \alpha_2\, u_{n+1} + u_n$$

Déterminer les termes v_n et w_n en fonction de n.

3) Montrer que : $\quad u_{n+1} = \dfrac{v_n - w_n}{\sqrt{5}}$

En déduire la formule de Binet : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

4) Vérifier à l'aide de votre calculatrice la véracité de cette formule en calculant les 6 premiers termes.

IV Limites de suites

Exercice 10

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = 1,4\, v_n - 0,05\, v_n^2 \end{cases}$

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.
   a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.
   En déduire que l'intervalle $[0\,;8]$ est stable par f.
   b) Montrer par récurrence que la suite (v_n) est croissante et bornée.
2) En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11

On définit la suite (S_n) sur $\mathbb{N}^*$ par $\quad S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$

Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Aide : On montrera que $(S_{2n} - S_n)$ est minorée par $\dfrac{1}{2}$ et on raisonnera par l'absurde, i.e. on suppose que la suite S_n est convergente ...

V Suites adjacentes

Exercice 12

Soient a et b deux nombres strictement positifs.

1) Montrer que $\quad \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$
2) On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

Justifier que a_n et b_n existent sur $\mathbb{N}$ et démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ a_n \leqslant b_n$

3) Montrer que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

4) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont même limite.

Remarque :

- Le nombre $\sqrt{ab}$ s'appelle la moyenne géométrique de a et b. C'est ce que doit mesurer le côté d'un carré pour qu'il ait une aire égale à celle d'un rectangle de dimension $a \times b$.
- La limite commune de (a_n) et (b_n) s'appelle la moyenne arithmético-géométrique de a et b et on la note $\mathrm{M}(a, b)$.
- Le nombre $\dfrac{1}{\mathrm{M}(1, \sqrt{2})}$ s'appelle la constante de Gauss.

EXERCICE 13

Soit les suites (u_n) et (v_n)définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$, $v_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

1) Écrire un algorithme permettant de calculer u_n et v_n, n étant donné.
   Donner alors les valeurs approchées des termes u_{10} et v_{10}.
   Qu peut-on conjecturer ?

2) a) Démontrer par récurrence que pour tout n, $u_n < v_n$
   b) Démontrer que les suites u_n et v_n sont respectivement croissante et décroissante.
   c) Montrer que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = u_n - v_n$ est géométrique.
   En déduire que les suites (u_n) et v_n sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

3) Trouver deux réels distincts a et b tels que les suites (s_n) et (t_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :
$$s_n = u_n + av_n \quad \text{et} \quad t_n = u_n + bv_n$$
   soient géométriques (éventuellement constantes).

4) Exprimer s_n et t_n en fonction de n.

5) Trouver la limite des suites (u_n) et (v_n)

VI Fraction continue

EXERCICE 14

On pose : $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2+1}$, $u_2 = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2+1}}$, … , $u_n = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{\vdots}{2 + \dfrac{1}{2+1}}}}$

1) Définir la suite (u_n) par récurrence.

2) Soit la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.
   Déterminer la solution positive α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

3) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \; |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \; |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$

c) Quelle est la limite de (u_n) ?

EXERCICE 15

Soit n un entier ($n \geqslant 1$).
On considère l'équation (E_n) dont on se propose de déterminer la solution positive :

$$(\mathrm{E}_n) : \quad x = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{\cfrac{\vdots}{1 + \cfrac{2}{x}}}}} \quad \Bigg\} \; n \text{ traits de fraction}$$

1) Écrire les équations (E_1), (E_2) et (E_3) et les résoudre.
Quelle conjecture peut-on faire ?

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$;

et soit la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

a) Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β telles que $\alpha < 0 < \beta$.

b) On pose $u_n = \dfrac{x_n - \beta}{x_n - \alpha}$ avec $x_0 \neq \alpha$.
Montrer que u_n est défini pour tout entier n et que la suite (u_n) est une suite géométrique.

c) En déduire que $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{x_0 - \beta}{x_0 - \alpha}$.

3) Résoudre alors l'équation (E_n) et confirmer la conjecture de la question 1).

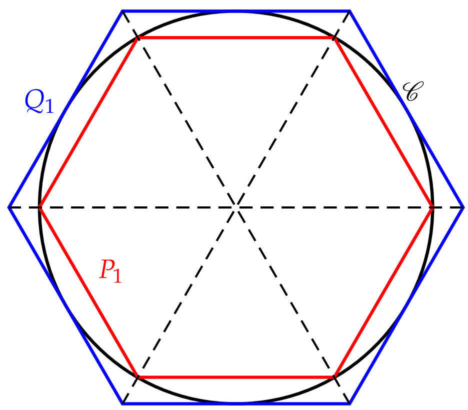
VII Encadrement de Pi - méthode d'Archimède

EXERCICE 16

Dans un texte intitulé « *De la mesure du cercle* », Archimède imagine la première méthode jamais proposée permettant, en théorie, le calcul de π avec une précision aussi grande qu'on le souhaite. L'exposé suivant suit les idées d'Archimède avec des méthodes modernes.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1 : on construit, pour tout $n \geqslant 1$ deux polygones réguliers P_n, et Q_n , ayant 3×2^n côtés, P_n étant inscrit dans $\mathscr{C}$, et Q_n, exinscrit à $\mathscr{C}$ (voir la figure ci-contre).

Nous admettons que le périmètre du cercle (égal à 2π) est encadré par ceux des deux polygones. Dans la suite, on note p_n et q_n, les demi-périmètres respectifs de P_n et Q_n. Ainsi, $p_n < \pi < q_n$



$n = 1$ (6 côtés)

1) Le cas $n = 1$
   Montrer que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$.

2) Expression de p_n, et q_n
   a) Évaluer, en fonction de n, l'angle au centre qui intercepte l'un des côtés de P_n ou de Q_n.
   b) En déduire les relations : $p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$ et $q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

   En pratique, ces expressions ne permettent pas un calcul numérique de p_n, et q_n. Dans la suite, nous nous orientons vers un calcul de proche en proche.

3) Relations de récurrence
   a) On pose $\alpha = \dfrac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}$. Exprimer p_n, et q_n, en fonction de n et α.
   b) Exprimer $\sin 2\alpha$ et $1 + \cos 2\alpha$ en fonction de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.
   c) En déduire que, $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{q_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_n} + \dfrac{1}{q_n}\right)$ et $p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}$
   d) Calculer q_2 et p_2 à l'aide des relations précédentes.

4) Étude des suites (p_n) et (q_n)
   a) Soit a et b deux réels vérifiant $0 \leqslant a \leqslant b$.
      Démontrer les relations : $a < \sqrt{ab} < b$ (i) et $a < \dfrac{2ab}{a+b} < \dfrac{a+b}{2} < b$ (ii)
   b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n < q_n$.
   c) En déduire que la suite (p_n) est croissante et que (q_n) est décroissante.
   d) Démontrer que $\forall n \geqslant 1$, $q_{n+1} - p_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(q_n - p_n)$.
      (On pourra utiliser (i) et (ii) à bon escient.)
      En déduire que $\forall n \geqslant 1$, $q_n - p_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ puis que les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes.
   e) Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$?

5) Proposer un algorithme permettant de calculer les valeurs de p_n et q_n jusqu'à obtenir un encadrement de n d'amplitude 10^{-10}.