Applications - Injections - Surjections - Bijections

1 Fonctions explicites

EXERCICE 1

Soient $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \text{ pair} \mapsto \dfrac{n}{2} \\ n \text{ impair} \mapsto \dfrac{n-1}{2} \end{cases}$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.
Que vaut $g \circ f$? Que peut-on conclure ?

EXERCICE 2

Soient $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ 0 \mapsto g(0) = 0 \\ n \neq 0 \mapsto g(n) = n-1 \end{cases}$

Montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ mais que ni f, ni g ne sont bijectives.

2 Fonctions numériques

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

a) Déterminer l'image de f.

b) Montrer que f est injective sur $[-1, 1]$ et déterminer $\left(f_{|[-1;1]}\right)^{-1}$

c) Déterminer $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{4};1\right]\right)$

EXERCICE 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x\ln x + \dfrac{1}{x}$

a) Sur quels intervalles (les plus grands possibles) f est-elle injective ?

b) Déterminer $f\left(\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right]\right)$

EXERCICE 5

a) Montrer que la fonction tangente hyperbolique est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et déterminer la forme explicite de sa réciproque.

b) Montrer que la fonction sinus hyperbolique est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer la forme explicite de sa réciproque.

c) Montrer que la fonction cosinus hyperbolique est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1\,;+\infty[$ et déterminer la forme explicite de sa réciproque.

3 Application dans C

EXERCICE 6

Soit $\omega \in \mathbb{C}/\mathbb{U}$. Montrer que l'application $z \mapsto \dfrac{z+\omega}{\overline{\omega}z+1}$ est bijective de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ et déterminer sa réciproque.

EXERCICE 7

Soit l'application sur $\mathbb{C}^*$, $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{z}$

1) Montrer que f est bijective de $\mathbb{C}^*$ sur lui-même et déterminer sa réciproque.

2) a) Montrer que l'image par f d'un cercle de centre O est un cercle. Quelle est l'image de $\mathbb{U}$ par f ?

   b) Plus généralement, montrer que l'image par f d'un cercle ne passant pas par O est un cercle.

   On pourra montrer que l'équation d'un cercle de centre d'affixe ω et de rayon r peut se mettre sous la forme : $z\overline{z} - \overline{\omega}z - \omega\overline{z} + \omega\overline{\omega} - r^2 = 0$

3) Montrer que l'image par f d'un cercle passant par O (mais privé de O) est une droite.

4 Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

EXERCICE 8

Les applications suivantes sont-elles injectives ? sujectives ? bijectives ?

a) $f_1\ :\ (x,y) \mapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

b) $f_2\ :\ (x,y) \mapsto (1\ ,\ x-y\ ,\ y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

c) $f_3\ :\ (x,y) \mapsto (2x+y\ ,\ 3x-2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

d) $f_4\ :\ (x,y,z) \mapsto (x+y+z\ ,\ x-y-z\ ,\ x)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

EXERCICE 9

Soit l'application f de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans lui-même : $(x,y) \mapsto \left(\dfrac{x+y}{2}\ ,\ \dfrac{2xy}{x+y}\right)$

a) f est-elle injective ?

b) Déterminer son image.

Exercice 10

Soit l'application f de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}_+^*$: $(x,y) \mapsto \dfrac{2x+3y}{x+y}$

a) f est-elle injective ?

b) Déterminer son image.

Exercice 11

Soit l'application f de $(\mathbb{R})^2$ dans lui-même : $(x,y) \mapsto (x+y\ ,\ xy)$

a) Soit $(s,p) \in \mathbb{R}^2$. À quelle condition nécessaire et suffisante (s,p) est-il dans l'image de f ?

b) Déterminer l'image réciproque par f de l'ensemble $\left\{(s,p) \in \mathbb{R}^2\ /\ s^2 - 4p = 1\right\}$.

5 Applications

Exercice 12

Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications.

On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer alors que f et g le sont aussi.

Exercice 13

Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective.

Montrer alors que $f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 14

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. On suppose que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Exercice 15

Soit E, F et G trois ensembles non vides et $f : E \to F$ une application.

Montrer que l'application $\begin{cases} E^G \to F^G \\ \varphi \mapsto f \circ \varphi \end{cases}$ est injective si et seulement si, f l'est.

6 Déterminer des fonctions

Exercice 16

Déterminer toutes les fonctions croissantes f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$

Exercice 17

Déterminer toutes les injections f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ f(n) \leqslant n$

Exercice 18

Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f(n) + f \circ f(n) = 2n$$

7 Avec la logique

EXERCICE 19

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E.

Soit l'application $f : \begin{cases} \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ \quad X \mapsto (X \cap A \,,\, X \cap B) \end{cases}$

a) Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$

b) Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \varnothing$