Relations binaires. Relations d'équivalence et d'ordre

1 Relations binaires

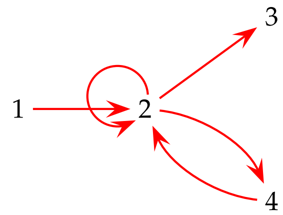
EXERCICE 1

Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On définit sur E une relation $\mathscr{R}^{tr}$ sur E appelée « clôture transitive de $\mathscr{R}$ », par :

$$\forall x, x' \in E, \quad x \,\mathscr{R}^{tr}\, x' \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^* /\ \exists\, x_0, x_1, \dots, x_n \in E /\ \ x = x_0 \ \text{ et } \ x_n = x' \ \text{ et } \ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \ x_k \,\mathscr{R}\, x_{k+1}$$

a) Soit un arbre correspondant à une relation $\mathscr{R}$, trouver l'arbre correspondant à la relation $\mathscr{R}^{tr}$



b) Montrer que $\mathscr{R}^{tr}$ est transitive.

c) Montrer que si $\mathscr{R}$ est réflexive alors $\mathscr{R}^{tr}$ est réflexive.

d) Montrer que si $\mathscr{R}$ est symétrique alors $\mathscr{R}^{tr}$ est symétrique.

2 Relation d'équivalence

EXERCICE 2

On définie la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par : $(p, q) \,\mathscr{R}\, (p', q') \quad \Leftrightarrow \quad pq' = p'q$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

EXERCICE 3

Soient E et F deux ensembles et une application $f : E \longrightarrow F$. On définit une relation $\equiv_f$ sur E par $x \equiv_f y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$.

a) Montrer que $\equiv_f$ est une relation d'équivalence et décrire ses classes d'équivalence.

b) Pour tout $x \in E$, on note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x. Les éléments de $\overline{x}$ ont la même image par f que l'on note $\overline{f}(\overline{x})$. On définit ainsi une application $\overline{f}$ dans l'ensemble quotient $E/\equiv_f$ dans F. Montrer que $\overline{f}$ est injective.

3 Relation d'ordre

EXERCICE 4

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On définit une relation $\leqslant_f$ sur $\mathbb{R}$ par

$$x \leqslant_f y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) - f(x) \geqslant |y - x|$$

a) Montrer que $\inf_f$ est une relation d'ordre.

b) Montrer que $\inf_f$ est totale si, et seulement si,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(y) - f(x)| \geqslant |y - x|$$

c) À quoi la relation $\leqslant_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}}$ est -elle égale ?

EXERCICE 5

Soit E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.

1) On définit une relation $\preccurlyeq^o$ sur $E \times E$ par :

$$(x, y) \preccurlyeq^o (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x \preccurlyeq x' \text{ et } y \preccurlyeq y'$$

   a) Montrer que $\preccurlyeq^o$ est une relation d'ordre.

   b) Montrer que si E possède au moins deux éléments, $\preccurlyeq^o$ n'est pas totale.

2) On définit un relation $\preccurlyeq^*$ sur $E \times E$ par :

$$(x, y) \preccurlyeq^* (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x \preccurlyeq x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \preccurlyeq y')$$

   a) Montrer que $\preccurlyeq^*$ est une relation d'ordre appelé lexicographique sur $E \times E$.

   b) Montrer que si $\preccurlyeq$ est totale alors $\preccurlyeq^*$ est totale.

3) On se place dans $\mathbb{R}$ avec $\preccurlyeq$ l'ordre naturel $\leqslant$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement l'ensemble des majorants de (x_0, y_0) pour $\preccurlyeq^o$ et $\preccurlyeq^*$.

EXERCICE 6

Dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ muni de la relation d'inclusion $\subset$, l'ensemble $\left\{\left[-\dfrac{1}{n}\, ,\, n\right]\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède-t-il un plus grand éléments ? une borne supérieure ?

EXERCICE 7

Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité $|$, l'ensemble $\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possède-t-il un plus petit élément ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

EXERCICE 8

E est l'ensemble des couples (I, f) constitués d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$

On définit sur E une relation $\preccurlyeq$ par :

$$(I, f) \preccurlyeq (J, g) \quad \Leftrightarrow \quad I \subset J \text{ et } g_{|_I} = f$$

a) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

b) L'ensemble des couples $([\epsilon\, , +\infty[\, , \ln)$, ϵ décrivant $\mathbb{R}_+^*$, possède-t-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?