Structure de groupe et d'anneau

1 Loi de compositions internes

EXERCICE 1

On définit la loi $*$ sur $[0,1]$ par : $\forall x, y \in [0,1], \quad x * y = x + y - xy$

a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne, commutative et associative sur $[0,1]$.

b) Montrer que la loi $*$ possède un élément neutre sur $[0,1]$.

c) Quels sont les éléments inversibles sur $[0,1]$?

2 Groupe

EXERCICE 2

Pour tous $x, y \in]-1;\,1[$, on pose $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

a) Montrer que $*$ est une loi interne sur $]-1;\,1[$.

b) Montrer que $(]-1;\,1[,\ *)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 3

On définit une loi de composition interne $*$ dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad (x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$$

a) Montrer que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\,,\ *)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

b) Simplifier $(x,y)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

EXERCICE 4

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Montrer que l'ensemble E des $\exp\left(\dfrac{2ik\pi}{p^n}\right)$, (k,p) décrivant $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$

EXERCICE 5

Montrer que $E = \{z \in \mathbb{C} /\ \exists n \in \mathbb{N}^* /\ z^n = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

EXERCICE 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note G l'ensemble des permutations $\sigma \in S_{[\![1,n]\!]}$ telles que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \sigma(n-k+1) = n - \sigma(k) + 1$$

Montrer que G est un sous-groupe de $S_{[\![1,n]\!]}$

EXERCICE 7

Soit six fonctions a, b, c, d, e, f de $\mathbb{R}/\ \{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$a(x) = x, \quad b(x) = 1 - x, \quad c(x) = \frac{1}{x}, \quad d(x) = \frac{x}{x-1}, \quad e(x) = \frac{x-1}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Montrer que $\{a, b, c, d, e, f\}$ est un sous-groupe des bijections de $\mathbb{R}/\ \{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ dont on donnera la table.

EXERCICE 8

Centre d'un groupe G

a) Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G indexée sur I.
Montrer que $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

b) Soit $x \in G$. On appelle centralisateur de x dans G, noté $C_G(x)$, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec x.
Montrer que $C_G(x)$ est un sous-groupe de G.

c) On appelle centre de G, noté $Z(G)$, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G.
Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

EXERCICE 9

a) Trouver 2 sous-groupes de $\mathbb{R}^*$ dont l'union n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$.

b) Soient G un groupe de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-groupes de G.
Montrer alors que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_n$ est un sous-groupe de G

EXERCICE 10

Sous-groupe distingué.

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

a) Soit $x \in G$. On pose : $xHx^{-1} = \{x\,h\,x^{-1}\}_{h \in H}$.
Montrer que xHx^{-1} est un sous-groupe de G.

b) On pose : $H_G = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$. Montrer que H_G est un sous-groupe de G.

c) Montrer que pour tout $x \in G$: $x\,H_G\,x^{-1} = H_G$

EXERCICE 11

1) Soient G un groupe commutatif fini de cardinal n et g un élément de G.
   a) Montrer que l'application $x \mapsto gx$ est bijective de G sur G.
   b) Montrer, en calculant de deux manières le produit $\prod_{x \in G} gx$, que : $g^n = 1_G$

2) Déterminer tous les sous-groupe finis de $\mathbb{C}^*$

EXERCICE 12

Soit G un groupe.

1) On suppose que : $\forall x \in G,\ x^2 = 1$.
   Montrer que G est commutatif.
2) On suppose que : $\forall x, y \in G,\ (xy)^3 = x^3y^3$, et tout élément de G peut être écrit comme un cube.
   a) Montrer que $\forall x, y \in G,\ x^3y^2 = y^2x^3$.
   b) En déduire que pour tout $x \in G,\ x^2$ commute avec tout les éléments de G.
   c) En déduire que G est commutatif.

EXERCICE 13

Soit G un groupe. On définit la relation $\mathscr{R}$ sur G par :

$$x \mathscr{R} y \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in G,\ y = g^{-1}xg$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

3 Anneau

EXERCICE 14

On note A l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

Montrer que A est stable par différence et produit. L'ensemble A est-il un sous-anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

EXERCICE 15

1) On note A l'ensemble de rationnels $\dfrac{p}{2^n}$ où $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$
   a) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
   b) Déterminer $U(A)$
2) Même question avec l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux.

EXERCICE 16

1) On rappelle que $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   Montrer que : $\forall z \in \mathbb{Z}[i],\ |z|^2 \in \mathbb{N}$. En déduire $U(\mathbb{Z}[i])$.
2) a) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \left\{a + ib\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   b) Déterminer $U(\mathbb{Z}[i\sqrt{2}])$.

EXERCICE 17

Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \left\{a + b\sqrt{3},\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ est un corps.

EXERCICE 18

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b décrivent $\mathbb{K}$.

a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

b) $\mathscr{C}$ est-il un corps ?

EXERCICE 19

On rappelle que pour toutes les fonctions f et g de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f+g$ et fg sont définies par : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ et $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

a) Montrer que $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?

b) Montrer que $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un sous anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

c) Déterminer $U(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$

EXERCICE 20

1) Montrer que $\mathbb{Z}$ est le seul sous-anneau de $\mathbb{Z}$.

2) On s'intéresse aux sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

   a) Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

   b) Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

3) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
   D'après 2) $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que $n = a \wedge b$

EXERCICE 21

Soient A et B deux anneaux. On pose pour tous $(a,b), (a',b') \in A \times B$:

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') \quad \text{et} \quad (a,b)(a',b') = (aa', bb')$$

a) Montrer que $(A \times B, +, \times)$ est un anneau.

b) Montrer que si A et B sont non nuls, alors $A \times B$ n'est pas intègre.

EXERCICE 22

Soit E un ensemble.
Pour tous $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A et B, l'opération notée $A \Delta B$, telle que : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

a) Montrer que pour tous $A, B \mathscr{P}(E)$, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

b) Montrer que $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.

c) Déterminer $U(\mathscr{P}(E))$.

d) L'anneau $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ est-il intègre ?

e) Soit F une partie de E. Quelle propriété manque-il à $\mathscr{P}(F)$ pour que $\mathscr{P}(F)$ soit sous-anneau de $\mathscr{P}(E)$

EXERCICE 23

Élément nilpotent

Soit A un anneau. Un élément x de A est nilpotent si $\exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ x^n = 0_A$.

a) Montrer que le seul élément nilpotent de A est 0_A si A est intègre.

b) Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents de A qui commutent sont encore nilpotents.

c) Pour tout élément x nilpotent de A, montrer que $(1_A - x)$ est inversible et déterminer son inverse.

EXERCICE 24

Anneau de Boole

Un anneau A est un anneau de Boole si A est non nul et si :

$$\forall x \in A, \quad x^2 = x \quad (x \text{ idempotent})$$

1) a) Montrer que : $\forall x, y \in A, \quad 2x = 0_A \quad \text{et} \quad yx = -xy$

   b) En déduire que A est commutatif.

2) Déterminer A dans le cas où A est intègre.

3) On définit une relation $\mathscr{R}$ sur A tel que : $x \mathscr{R} y \quad \Leftrightarrow \quad yx = x$

   Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre.

EXERCICE 25

Centre d'un anneau

On appelle centre d'un anneau A, noté $Z(A)$, l'ensemble des éléments de A qui permutent avec tous les éléments de A.

1) Montrer que $Z(A)$ est un sous-anneau de A.

2) On suppose que $\forall x \in A, \quad x^3 = x$

   a) Montrer que : $\forall x, y \in A, \quad xy = 0_A \quad \Rightarrow \quad yx = 0_A$

   b) Soit $x \in A$ tel que $x^2 = x$. Montrer que $x \in Z(A)$.
   On pourra étudier les quantités : $x(y - xy)$ et $(y - yx)x$ pour $y \in A$,

   c) Montrer que : $\forall x \in A, \quad x^2 \in Z(A)$.

   d) Montrer que A est commutatif.

4 Arithmétique modulaire

EXERCICE 26

Soit $a \in \mathbb{N}$. On note les éléments de $\dfrac{\mathbb{Z}}{a\mathbb{Z}}$ par les entiers de 0 à $(a-1)$.

$x = 2$ dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{a\mathbb{Z}}$ signifie $x \equiv 2\ [a]$ dans $\mathbb{Z}$.

Résoudre les équations suivantes pour dans les ensembles quotients précisés.

a) $5x = 2 \quad$ dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$ puis dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}}$.

b) $x^2 = 3 \quad$ dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ puis dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}$.

c) $x^2 + 3x + 1 = 0 \quad$ dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$.

d) $x^2 + x = 2 \quad$ dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$ puis dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{21\mathbb{Z}}$.

Exercice 27

Soit p premier. Effectuer le produit de tous les éléments de $U\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)$.
En déduire que : $(p-1)! \equiv -1\ [p]$ (théorème de Wilson)