Morphismes de Groupes

EXERCICE 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$.

1) Montrer que f est un morphisme du groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même.
2) Déterminer son image et son noyau.

EXERCICE 2

1) Montrer que l'application exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un morphisme du groupes $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2) Déterminer son image et son noyau.

EXERCICE 3

Soit G un groupe noté multiplicativement.
Pour $a \in G$, on note t_a l'application de G vers G définie par $t_a(x) = axa^{-1}$.

1) Montrer que t_a est un morphisme du groupe $(G, \times)$ dans lui-même.
2) Vérifier que : $\forall a, b \in G, \quad t_a \circ t_b = t_{ab}$
3) Montrer que t_a est bijective et déterminer son application réciproque.
4) En déduire que $T = \{t_a, \quad a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.

EXERCICE 4

Soit $(G, *)$, $(G', \top)$ deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1) Montrer que pour tout sous-groupe H de G, $f(H)$ est un sous-groupe de $(G', \top)$.
2) Montrer que pour tout sous-groupe H' de G', $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

EXERCICE 5

Soit $(G, *)$ un groupe et $a \in G$.
On note, e l'élément neutre et x^{-1} le symétrique d'un élément x, pour la loi $*$.
On définit une loi de composition interne $\top$ sur G par $x \top y = x * a * y$.

1) Montrer que $(G, \top)$ est un groupe.
2) Soit H un sous groupe de $(G, *)$ et $K = a^{-1} * H = \{a^{-1} * x, \quad x \in H\}$.
   Montrer que K est un sous groupe de $(G, \top)$.
3) Montrer que $f : x \to x * a^{-1}$ est un isomorphisme de $(G, *)$ vers $(G, \top)$.