# Applications linéaires ou Morphismes d'espaces vectoriels

## Table des matières

# 1 Applications linéaires et équations linéaires

## 1.1 Définition

**Définition 1 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On appelle application linéaire, ou homomorphisme d'espaces vectoriels, de $E$ dans $F$ l'application $f$ qui conserve les combinaisons linéaires :

$$\forall x, y \in E,\ \ \forall y \in F, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

L'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ est noté $\mathscr{L}(E, F)$.

- Si $F = E$, on appelle $f$ endomorphisme de $E$.
  L'ensemble des endomorphisme de $E$ est noté $\mathscr{L}(E)$
- Si $F = \mathbb{K}$, on appelle $f$ forme linéaire de $E$

**Remarque :**

- Une application linéaire traduit en quelque sorte la « proportionnalité » entre espaces vectoriels.
- Homomorphisme veut dire même structure.
- Si $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$ alors $f(0_E) = 0_F$

  En effet : $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) \ \Rightarrow\ f(0_E) = 0_F$

**Exemples :** Les exemples sont nombreux, en voici quelques uns :

- L'application $(a, b, c) \xrightarrow{f} (b - a\ ,\ 2c + b)$ est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

  Pour le montrer, c'est un jeu d'écriture : $\forall (a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3,\ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f[\lambda(a,b,c) + \mu(a',b',c')] &= f(\lambda a + \mu a'\ ,\ \lambda b + \mu b'\ ,\ \lambda c + \mu c') \\ &= (\lambda b + \mu b' - \lambda a - \mu a'\ ,\ 2\lambda c + 2\mu c' + \lambda b + \mu b') \\ &= [\lambda(b-a) + \mu(b'-a')\ ,\ \lambda(2c+b) + \mu(2c'+b')] \\ &= \lambda(b - a\ ,\ 2c + b) + \mu(b' - a'\ ,\ 2c' + b') \\ &= \lambda f(a,b,c) + \mu f(a',b',c') \end{aligned}$$

- $\mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme sur $E$. En effet :

$$\forall x, y \in E,\ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Id}_E(\lambda x + \mu y) = \lambda x + \mu y = \lambda \mathrm{Id}_E(x) + \mu \mathrm{Id}_E(y)$$

- L'application $P \xrightarrow{f} P'$ de dérivation est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$
- L'application $P \xrightarrow{f} P(x)$ d'évaluation en $x \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire de $\mathbb{K}[X]$
- L'application $f \xrightarrow{\varphi} \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est une forme linéaire de $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$.

D'autres applications ne sont pas linéaires

- De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ : $(a,b) \xmapsto{f} x - y + 2$ car $f(0,0) = 2 \neq 0$
- De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ : $(a,b) \xmapsto{f} x^2 + y^2$ car $f[2(1,1)] = f(2,2) = 8 \neq 2f(1,1)$

## 1.2 Homothétie vectorielle

**Définition 2 :** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle homothétie de $E$ de rapport $\lambda$, l'endomorphisme : $\lambda \mathrm{Id}_E \Leftrightarrow \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \lambda x \end{cases}$

## 1.3 Composition d'applications linéaires

**Théorème 1 :** Soient $E, F, G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
La composée de $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ suivie de $g$ une application linéaire de $F$ dans $G$ est une application linéaire de $E$ dans $G$.

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall g \in \mathscr{L}(F,G), \quad g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$$

**Démonstration :** $\forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda x + \mu y) &\overset{f \in \mathscr{L}(E,F)}{=} g\left[\lambda f(x) + \mu f(y)\right] \overset{g \in \mathscr{L}(F,G)}{=} \lambda g[f(x)] + \mu g[f(y)] \\ &= \lambda (g \circ f)(x) + \mu (g \circ f)(y)\end{aligned}$$

**Exemples :**

- L'application $P \xmapsto{\varphi} XP'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

  Les applications $P \xmapsto{f} P'$ et $P \xmapsto{g} XP$ sont linéaires donc l'application $\varphi = g \circ f$ est linéaire.
- L'application $f \xmapsto{\varphi} \displaystyle\int_0^1 f(e^t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire de $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$

  Les applications $f \xmapsto{u} f \circ \exp$ et $f \xmapsto{v} \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ sont linéaires donc l'application $\varphi = v \circ u$ est linéaire.

## 1.4 Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

**Théorème 2 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$

- L'image d'un sous-espace vectoriel de $E$ par $f$ est un sous-espace vectoriel de $F$
- $\mathrm{Im}\, f = f(E)$ est un sous-espace vectoriel de $F$ tel que :

$$f \text{ surjective de } E \text{ sur } F \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\, f = F$$

**Démonstration :** Soit $A$ un sous-espace vectoriel de $E$.

- $f(A) \subset F$
- $\begin{cases} 0_E \in A \\ f(0_E) = 0_F \end{cases} \Rightarrow \ 0_F \in f(A)$
- $\begin{array}{l} \forall y, y' \in f(A) \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{array}, \quad \begin{cases} y = f(x) \text{ et } y' = f(x') \\ \lambda x + \mu x' \in A \\ f(\lambda x + \mu x') = \lambda f(x) + \mu f(x') \end{cases} \Rightarrow \ \lambda y + \mu y' \in f(A)$

**Théorème 3 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$

- Pour toute partie $X$ de $E$ : $f\,[\text{Vect}(X)] = \text{Vect}[f(X)]$
- Si $E$ possède une base $(e_i)_{i \in I}$ : $\text{Im}\, f = \text{Vect}\,[f(e_i)]_{i \in I}$

**Remarque :** On rappelle que $\text{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires que l'on peut faire avec les vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ de $X$ où $I$ est un ensemble d'indices.

**Démonstration :** $f\,(\text{Vect}(X)) = f\left(\left\{\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right\}\right) \overset{f \text{ lin.}}{=} \left\{\sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i)\right\} = \text{Vect}\,[f(X)]$

Pour une base $(e_i)_{i \in I}$ de $E$ : $\text{Im}\, f = f(E) = f\,[\text{Vect}(e_i)_{i \in I}] = \text{Vect}\,[f(e_i)]_{i \in I}$

**Exemple :** $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f$ l'application dérivation des polynômes sur $\mathbb{K}_n[X]$.

$(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

$$\begin{aligned} \text{Im}\, f &= \text{Vect}\left[f(1), f(X), f(X^2), \dots, f(X^n)\right] = \text{Vect}\left(0, 1, 2X, \dots, nX^{n-1}\right) \\ &= \text{Vect}\left(1, X, \dots, X^{n-1}\right) = \mathbb{K}_{n-1}[X] \end{aligned}$$

## 1.5 Matrice et application linéaire

**Définition 3 :** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

L'application $X \mapsto AX$ de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est appelée l'application linéaire canoniquement associée à $A$.

**Remarque :** L'idée est d'associer à une matrice une application linéaire. On prend pour $\mathbb{K}^p$ la base canonique d'où le terme « canoniquement ».

⚠ L'application est définie de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ pour des raisons de compatibilité.

**Exemple :** L'application $f_A$ associée à la matrice $(2 \times 3)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ est définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ 3x + 4y + 7z \end{pmatrix} \quad \text{donc } (x, y, z) \overset{f_A}{\longmapsto} (y + 2z\,,\ 3x + 4y + 7z)$$

**Définition 4 :** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, C_2, \dots, C_p$.

On appelle image de la matrice $A$, notée $\operatorname{Im} A$, l'image de son application linéaire canoniquement associée : $X \mapsto AX$ de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p)$$

**Démonstration :** Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left[f(e_i)\right]_{1 \leqslant i \leqslant p} = \operatorname{Vect}(Ae_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} = \operatorname{Vect}(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$$

**Exemple :** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ donc $f_A$ définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ d'où

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}[(1,1,2)\ ,\ (3,2,3)\ ,\ (4,3,5)] = \operatorname{Vect}[(1,1,2)\ ,\ (3,2,3)]$$

car $(4,3,5) = (1,1,2) + (3,2,3)$

$\operatorname{Im} A$ est le plan vectoriel définie par les vecteurs (1,1,2) et (3,2,3)

## 1.6 Noyau d'une application linéaire

**Définition 5 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

On appelle noyau de $f$, l'ensemble, noté $\operatorname{Ker} f$, défini par :

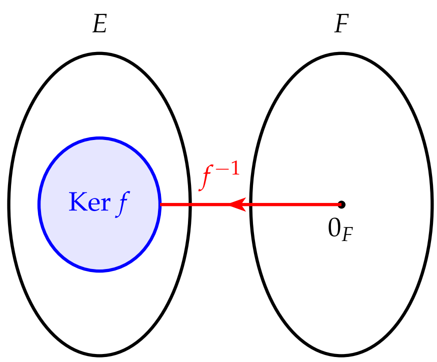
$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E,\ \ f(x) = 0_F\}$$

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On appelle noyau de $A$, noté $\operatorname{Ker} A$, le noyau de son application linéaire canoniquement associée.

**Remarque :**

- $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène :
$$f(x) = 0_F$$
.
- $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des éléments « invisibles » de $E$ pour $f$ car pour
$$x \in E,\ k \in \operatorname{Ker} f, \quad f(x+k) = f(x)$$



**Théorème 4 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Le noyau de $f$ est un sous-espace vectoriel de $E$ où l'on peut lire l'injectivité :

$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$$

- Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le noyau de $A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$

**Démonstration :**

- $\operatorname{Ker} f \subset E$
- $f(0_E) = 0_K$ donc $0_E \in \operatorname{Ker} f$
- $\forall x, x' \in \operatorname{Ker} f,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + \mu x') = \lambda f(x) + \mu f(x') = \lambda 0_F + \mu 0_F = 0_F$

  $\lambda x + \mu x' \in \operatorname{Ker} f$

**Remarque :** Pour montrer l'injectivité de $f$, comme $0_E \in \operatorname{Ker} f$, il suffit de montrer que : $\operatorname{Ker} f \subset \{0_E\}$

**Exemples :**

- L'endomorphisme dérivation $P \overset{f}{\longmapsto} P'$ de $\mathbb{K}[X]$ a pour noyau $\mathbb{K}_0[X]$
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $C_1, C_2, C_3$ ses colonnes.

  $$C_3 = C_1 + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + C_2 - C_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$$

- L'endomorphisme $f \overset{\varphi}{\longmapsto} f \times \sin$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas injectif mais sa restriction aux fonctions continues $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est injectif. En effet
  - $\operatorname{Ker} \varphi$ est l'ensemble des fonctions $f$ pour lequelles $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \sin x = 0$.

    D'après les zéros de la fonction sin, $f$ doit être nulle sur $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ mais peut ne pas être nulle sur $\pi\mathbb{Z}$. $\operatorname{Ker} \varphi \neq \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$ donc $\varphi$ n'est pas injective.
  - Si l'on restreint $\varphi$ aux fonctions continues, la seule fonction qui s'annule sur $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ est la fonction nulle donc $\operatorname{Ker} \varphi_{|\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \operatorname{Ker} \varphi = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$ et donc $\varphi_{|\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est injective.

## 1.7 Solution d'une équation linéaire

**Théorème 5 :** $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $y_0 \in F$

- Si $y_0 \notin \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = y_0$ n'a pas de solution.
- Si $y_0 \in \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = y_0$ est un sous-espace vectoriel affine de $E$ de direction $\operatorname{Ker} f$

**Remarque :** Si l'équation admet des solution, comme dans les équations différentielle, la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de la l'équation homogène.

**Démonstration :**

- Si $y_0 \notin \operatorname{Im} f$, il est immédiat que l'équation n'admet pas de solution.
- Si $y_0 \in \operatorname{Im} f$, l'équation $f(x) = y_0$ admet des solutions, soit $x_0$ une solution particulière et $x$ la solution générale, on a alors :

$$\begin{cases} f(x) = y_0 \\ f(x_0) = y_0 \end{cases} \overset{\text{par différence}}{\Leftrightarrow} f x) - f(x_0) = 0_F \overset{\text{linéarité}}{\Leftrightarrow} f(x - x_0) = 0_F \Leftrightarrow$$

$$x - x_0 \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow x \in x_0 + \operatorname{Ker} f$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble $x_0 + \operatorname{Ker} f$ donc un sous-espace affine de $E$ de direction $\operatorname{Ker} f$

**Exemple :** Déterminer la forme explicite de toute les suites récurrente d'ordre 2 telle que $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n - 4$.

- On crée l'application linéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ : $(u_n) \overset{\varphi}{\longmapsto} (u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)$ on doit résoudre l'équation $\varphi[(u_n)] = (-4)$.
- Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites récurrentes d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - 3X + 2$. Ce polynôme a pour racine 2 et 1. Donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $(\lambda 2^n + \mu)$
- On vérifie que la suite $(4n)$ est une solution particulière de l'équation générale : $4[(n+2) - 3(n+1) + 2n] = 4(n + 2 - 3n - 3 + 2n) = -4$.
- La solution générale sont les suites de la forme : $u_n = \lambda 2^n + \mu + 4n$

## 1.8 Isomorphismes

**Définition 6 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- On appelle isomorphisme de $E$ sur $F$ toute application linéaire bijective de $E$ sur $F$.
- Un isomorphisme de $E$ sur $E$ est appelé automorphisme de $E$.
  L'ensemble des automorphismes de $E$ est appelé groupe linéaire de $E$, noté $\mathrm{GL}(E)$.
- On dit que $F$ est isomorphe à $E$, s'il existe un isomorphisme de $E$ sur $F$.

**Remarque :** Si deux espaces vectoriels sont isomorphes, cela signifie que ces espaces vectoriels sont « identiques » du point de vue vectoriel ou que l'application linéaire qui les relie, « préserve » la structure vectoriel.

**Exemples :**

- L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ : $(x, y) \overset{f}{\longmapsto} x + iy$ est un isomorphisme.

- L'application $f \xmapsto{\varphi} (f', f(0))$ est un isomorphisme des fonctions de dérivées continues $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur le produit des fonctions continues et $\mathbb{R}$ : $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$

  Pour montrer la bijectivité, on peut exhiber la réciproque $\varphi^{-1}$

  $$\forall (g, a) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \quad \varphi^{-1}(g, a) \ : \ x \longmapsto a + \int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t$$

**Théorème 6 :** Soient $E$, $F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Si $f$ et $g$ sont respectivement des isomorphismes de $E$ sur $F$ et de $F$ sur $G$ alors, $g \circ f$ est un isomorphisme de $E$ sur $G$.
- Si $f$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$ alors $f^{-1}$ est un isomorphisme de $F$ sur $E$.

**Théorème 7 :** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad f_A \text{ automorphisme de } \mathbb{K}^n$$

**Exemple :** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $A$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

L'application canoniquement associée $(x, y) \xmapsto{f_A} (3x + y\ ,\ 5x + 2y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

L'application réciproque est alors $(x, y) \xmapsto{f_A^{-1}} (2x - y\ , -5x + 3y)$

**Théorème 8 :** **Isomorphisme et dimension.**

- Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Si $E$ est isomorphe à $F$ alors $\dim E = \dim F$
- Réciproquement, si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ alors $F$ est isomorphe à $E$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$

**Remarque :** Le dernier point est très intéressant. On connaît tout d'un espace vectoriel de dimension finie si l'on connaît sa dimension. À une isomorphisme près, les espaces de dimension finie sont les espaces $\mathbb{K}^n$.

**Démonstration :**

- $f$ bijective montrons que $\dim E = \dim F$.

  Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de $E$. $f$ est surjective donc $F = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left[f(e_i)\right]_{1 \leqslant i \leqslant n}$
  $F$ est engendré par $(f(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ donc $\dim f \leqslant n$

  Montrons que $(f(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de $F$.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F \overset{\text{linéarité}}{\Leftrightarrow} f\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right] = 0_F \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} f$$

$f$ est injective donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \overset{(e_i) \text{ base}}{\Leftrightarrow} \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

$(f(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre donc $\dim F \geqslant n$ et par suite $\dim E = \dim F = n$

- $E$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $E$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

  Soient $I = [\![1, n]\!]$ et $(e_i)_{i \in I}$ une base de $E$.

  Soit l'application de $\mathbb{K}^n$ dans $E$, $(x_i)_{i \in I} \overset{\varphi}{\longmapsto} \displaystyle\sum_{i \in I} x_i e_i$. $\varphi$ est linéaire car :

$$\begin{aligned}\varphi[\lambda(x_i) + \mu(x_i')]_{i \in I} &= \varphi[(\lambda x_i) + (\mu x_i')]_{i \in I} = \sum_{i \in I}(\lambda x_i + \mu x_i') = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \mu \sum_{i \in I} x_i' \\ &= \lambda \varphi[(x_i)]_{i \in I} + \mu \varphi[(x_i')]_{i \in I}\end{aligned}$$

  $\varphi$ est bijective car $(e_i)_{i \in I}$ est une base de $E$ donc :

$$\forall x \in E,\ \exists ! (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i \in I} x_i e_i = \varphi[(x_i)]_{i \in I}$$

- Si $E$ et $F$ ont même dimension finie $n$ donc $E$ est $F$ sont isomorphe à $\mathbb{K}^n$ dont $E$ et $F$ sont isomorphes entre eux.

**Théorème 9 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i \in I}$ une base de $E$.

$f$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$ si, et seulement si $(f(e_i))_{i \in I}$ est une base de $F$

# 2 Lien entre noyau et image

## 2.1 Rang et dimension

**Définition 7 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Si $\operatorname{Im} f$ est de dim. finie, on appelle le rang de $f$, noté $\operatorname{rg}(f)$, la dimension de $\operatorname{Im} f$

**Théorème 10 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Si $F$ est de dimension finie : $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim F$ égalité si $f$ surjective
- Si $E$ est de dimension finie : $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E$ égalité si $f$ injective

**Démonstration :** $E$ et $F$ de dimension finie

- $\operatorname{Im} f \subset F \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim F \Rightarrow \operatorname{rg}(f) \leqslant \dim F$

- Soit $I = [\![1, n]\!]$ et $(e_i)_{i \in I}$ une base de $E$.

  $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}[f(e_i]_{\in I} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Im} f \leqslant n \quad\Rightarrow\quad \operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E$

**Remarque** : Si $E$ et $F$ sont de même dimension finie et $f$ injective ou surjective alors $f$ est bijective car

- $f$ injective $\Rightarrow$ $\operatorname{rg}(f) = \dim E = \dim F$ $\Rightarrow$ $f$ surjective
- $f$ surjective $\Rightarrow$ $\operatorname{rg}(f) = \dim F = \dim E$ $\Rightarrow$ $f$ injective

## 2.2 Théorème du rang

**Théorème 11** : Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Si $I$ supplémentaire de $\ker f$ dans $E$, alors $f_{|I}$ est un isomorphisme de $I$ sur $\operatorname{Im} f$
- Si $E$ de dimension finie alors $\dim E = \dim \ker f + rg(f)$

**Démonstration** : Par restriction $f_{|I}$ linéaire dans $\operatorname{Im} f$ et $E = I \oplus \operatorname{Ker} f$ :

- $\ker f_{|I} = I \cap \operatorname{Ker} f = \{0_F\}$ $\Rightarrow$ $f_{|I}$ injective.
- Soit $y \in \operatorname{Im} f$, $\exists x \in E$, $y = f(x)$,

  or on peut décomposer $x = i + k$ avec $i \in I$ et $k \in \operatorname{Ker} f$ donc

  $f(x) = f(i+k) = f(i) + f(k) = f(i) + 0_F = f_{|I}(i)$ $\Rightarrow$ $f_{|I}$ surjective.
- $f_{|I}$ est bijective donc est un isomorphisme de $I$ sur $\operatorname{Im} f$.
- Si $E$ est de dimension finie alors $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire $I$ dans $E$.

  $f_{|I}$ est un isomorphisme de $I$ sur $\operatorname{Im} f$ :
  $$\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim I = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$$

**Exemple** : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $f_A$ est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

Déterminons $\operatorname{Im} f$ par triangulation (pivot sur les colonnes) et $\operatorname{Ker} f$ en partant de la matrice identité :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow C_2 - 2C_1 \rightarrow \\ \leftarrow C_3 + C_1 \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow C_3 + 2C_2 \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\operatorname{Im} A =$ | | $\operatorname{Ker} A=$ |
| $\operatorname{Vect}[(1,2,1)\,,\,(0,-5,-1)]$ | | $\operatorname{Vect}[(-3,2,1)]$ |
| $\operatorname{rg}(f_A) = 2$ | $+$ | $\dim \operatorname{Ker} f_A = 1$ |

### 2.3 Rang d'une matrice

**Définition 8 :** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Le rang de $A$ est égal au rang de l'application linéaire canoniquement associée à $A$ i.e. au rang de la famille de colonne de $A$ :

  On a $\text{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$
- Dans le cas où $n = p$, $A$ inversible si, et seulement si, $\text{rg}(A) = n$

**Démonstration :**

- $\text{Im}\,(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p) \quad \Rightarrow \quad \text{rg}(A) \leqslant p$

  $\text{Im}\,A \subset \mathbb{K}^n \quad \Rightarrow \quad \text{rg}(A) \leqslant n$
- Si $n = p$, $A$ inversible $\Leftrightarrow$ $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ libre $\Leftrightarrow$ $\text{rg}(A) = n$

**Théorème 12 :** Toutes opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice $A$ en préserve le rang.

## 3 Détermination d'une application linéaire

### 3.1 Détermination d'une application linéaire sur une base

**Théorème 13 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $(e_i)_{i\in I}$ une base de $E$. Pour toute famille $(f_i)_{i\in I}$ de vecteurs de $F$, il existe une unique application linéaire $u$ de $E$ dans $F$ telle que : $\forall i \in I,\ u(e_i) = f_i$

**Remarque :** Pour connaître une application linéaire, il suffit de connaître les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace de départ.

### 3.2 Espaces vectoriels d'applications linéaires

**Théorème 14 :** Soient $E$, $F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- $\mathscr{L}(E,F)$ est un $K$-espace vectoriel.
- $\forall f, f' \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall g, g' \in \mathscr{L}(F,G)$ :

$$g \circ (f + f') = (g \circ f) + (g \circ f') \quad \text{et} \quad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$$

### 3.3 Dimension d'un espace vectoriel d'applications linéaires

**Théorème 15 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
$\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$

### 3.4 Anneau des applications linéaires

**Théorème 16 :** Soit $E$un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau avec : $1_{\mathscr{L}(E)} = \mathrm{Id}_E$
- $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des inversibles de l'anneau $\mathscr{L}(E)$ : $U(\mathscr{L}(E)) = \mathrm{GL}(E)$.

**Remarque :** Pour facilité la rédaction, on omet le symbole $\circ$ de composition en notant $gf$ à la place de $g \circ f$.

### 3.5 Application linéaire sur une somme directe

**Théorème 17 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Si $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$ et si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$ alors, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que : $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$

## 4 Formes linéaires et hyperplans

### 4.1 Forme linéaire

**Définition 9 :** Soient $I = [\![1,n]\!]$ et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $(e_i)_{i\in I}$.
Soit $\varphi$ une forme linéaire tel que pour tout $i \in I$, $\varphi((e_i) = a_i$. On a alors :

$$\forall x \in E,\ \text{de coordonnées } (x_i)_{i\in I},\ \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

**Remarque :** $\varphi$ associe à tout vecteur de $E$ une combinaison linéaire (dépendant de la base choisie) de ses coordonnées.

Soit $\varphi$ une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ avec $\varphi(1,0,0) = a$, $\varphi(0,1,0) = b$, $\varphi(0,0,1) = c$,

$$\varphi(x,y,z) = ax + by + cz$$

**Exemple :** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi$ la forme linéaire évaluation sur $\mathbb{R}_n[X]$. On pose $\varphi(X^i) = x^i$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$.

$$\forall P = \sum_{i=1} n a_i X^i \in \mathbb{R}_n[X],\quad \varphi(P) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(X^k) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \ \Rightarrow\ P \stackrel{\varphi}{\longmapsto} \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$

Par exemple sur $\mathbb{R}_3[X]$, $P \xmapsto{\varphi} P(3)$, avec $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$,
$\varphi(P) = 27a + 9b + 3c + d$

## 4.2 Hyperplan

**Définition 10 :** Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle hyperplan de $E$ tout noyau d'une forme linéaire non nulle de $E$.

**Remarque :** On exclus le cas $E \neq \{0_E\}$ sinon le noyau serait égal à $E$ ce que l'on veut éviter (dimension $(n-1)$).

On retiendra qu'un hyperplan est l'ensemble décrit par une équation linéaire non nulle sur les coordonnées d'une base donnée.

**Exemples :**

- Sur $\mathbb{R}^3$, la forme linéaire $(x,y,z) \xmapsto{\varphi} x - 2y + 5z$ donne comme hyperplan l'équation $x - 2y + 5z = 0$ qui correspond à un plan dans l'espace usuel.
- Dans $\mathbb{R}_3[X]$, la forme linéaire $op\varphi \longmapsto P'(1) + P(0)$ donne comme hyperplan l'équation $P'(1) + P(0) = 0$ que l'on peut traduire en posant :

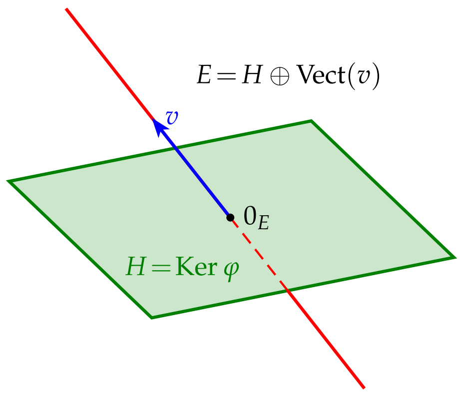
$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad \text{par} \quad 3a + 2b + c + d = 0$$

**Théorème 18 :** Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si $H$ est un hyperplan de $E$ alors $H$ est le supplémentaire d'une droite de $E$.
- Si $\dim E = n$ alors les hyperplans $H$ de $E$ sont les sous-espace vectoriels de $E$ tels que $\dim H = n - 1$

**Remarque :**

- Dans l'espace usuel un hyperplan est un plan
- Dans le plan usuel un hyperplan est une droite.




**Démonstration :**
Notons $\varphi$ une forme linéaire non nulle de noyau $H$. Soit $v \in E / \ker \varphi$.

Soit $x \in E$ : $\varphi\left(x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v\right) = \varphi(x) - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\varphi(v) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$

Donc $x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)} v \in \operatorname{Ker}\varphi = H$ donc $x \in H + \operatorname{Vect}(v)$.

Comme $H \cap \operatorname{Vect}(v) = \{0_F\}$ alors $E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Vect}(v)$

**Exemples :**

- L'équation $2x + y - z - t = 0$ avec $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ correspond à un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ qui est le noyau de la forme linéaire $(x, y, z, t) \xmapsto{\varphi} 2x + y - z - t$
- L'ensemble $\{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(0) = P(1)\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_4[X]$ qui est le noyau de la forme linéaire $P \xmapsto{\varphi} P(0) - P(1)$

> **Théorème 19 :** Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
>
> Si $H$ est un hyperplan de $E$ et $\varphi$ et $\psi$ deux formes linéaires non nulles de $E$ dont $H$ est le noyau alors, $\psi = \lambda\varphi, \quad \lambda \in \mathbb{K}^*$

**Remarque :** L'équation de $H$ est définie à une multiplication d'un scalaire près.

**Démonstration :** D'après le théorème précédent si $v \in E/H$, alors $E = H \oplus \operatorname{Vect}(v)$. La forme linéaire $\varphi(v)\psi - \psi(v)\varphi$ est alors nulle sur $H$ et en $v$ donc nulle sur $E$ par linéarité. Or $\varphi(v) \neq 0$ donc $\psi = \dfrac{\psi(v)}{\varphi(v)}\varphi = \lambda\varphi$

> **Théorème 20 :** Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
>
> - L'intersection de $r$ hyperplans de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $d \geqslant n - r$
> - Tout sous-espace vectoriel de dimension $(n - r)$ est l'intersection de $r$ hyperplans de $E$

**Remarque :** Dans $\mathbb{R}^3$, on sait que l'intersection de deux plans est soit une droite soit un plan si les plans sont confondus.
Dans $E$, chaque nouvelle intersection d'hyperplan occasionne une perte potentielle d'une dimension.

**Démonstration :**

- Soit $r$ hyperplans de $E$ : $H_1, H_2, \dots, H_r$.

  Pour $k \in I = [\![1, r]\!]$, notons $\varphi_k$, une forme linéaire non nulle de $E$ dont $H_k$ est le noyau.

  L'application $x \xmapsto{\Phi} (\varphi_k(x))_{k \in I}$ est linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}^r$ et de noyau $\bigcap_{k=1}^{r} H_k$, d'après le théorème du rang :

$$\dim \bigcap_{k=1}^{r} H_k = \dim E - \operatorname{rg}(\Phi) \geqslant \dim E - \dim \mathbb{K}^r \quad \Rightarrow \quad \dim \bigcap_{k=1}^{r} H_k \geqslant n - r$$

- Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $(n-r)$ et $I = [\![1, r]\!]$.

  Soit $(e_k)_{k \in I}$ une base de $E$ dont les $(n-r)$ derniers vecteurs forment une base de $F$ et $\varphi_k$ la forme linéaire qui associe à $x \in E$ sa $k$-ieme coordonnée.

  $$\forall x \in F \quad \Leftrightarrow \quad x \in \text{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_r(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} \varphi_k$$

  Donc $F = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} \varphi_k$ donc $F$ est l'intersection de $r$ hyperplans.

# 5 Projecteurs et symétries

## 5.1 Définitions

**Définition 11 :** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$. Tout élément $x$ de $E$ s'écrit de façon unique comme somme d'un élément $y$ de $F$ et d'un élément $z$ de $G$ : $x = y + z$.

- On appelle projecteur sur $F$ parallèlement à $G$, l'application :

$$p \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto p(x) = y \end{cases}$$

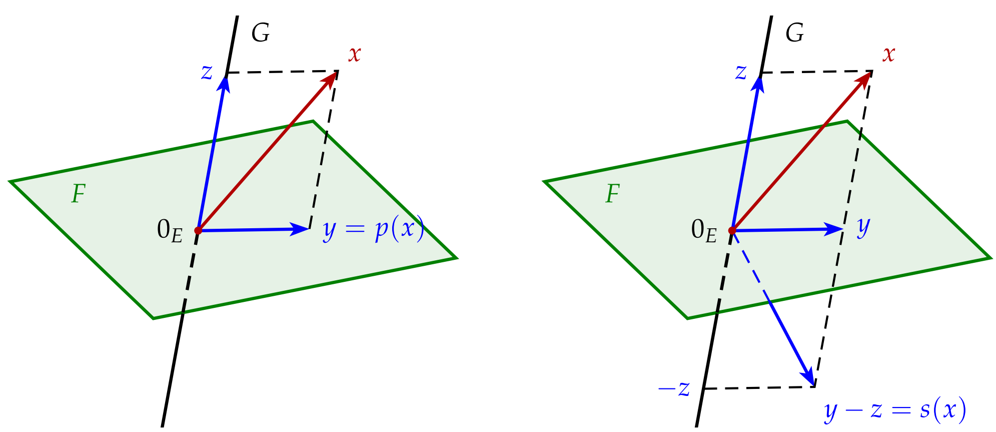
- On appelle symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$, l'application :

$$s \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto s(x) = y - z \end{cases}$$

Dans ces deux cas, $F$ est appelé la base et $G$ la direction du projecteur ou de la symétrie

**Remarque :** La projection désigne l'image d'un vecteur par un projecteur.

Ces définitions généralisent la notion de projection et de symétrie dans $\mathbb{R}^3$ comme le montre les figures ci-dessous :



**Exemple :**
Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ la projection et la symétrie par rapport au plan $F$ d'équation $x+y+z=0$ parallèlement à la droite $G$ de vecteur directeur $(1,1,1)$.
Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Décomposons $(x,y,z)$ en un élément de $F$ et n élément de $G$.

$$\begin{cases} (x,y,z)=(a,b,c)+\lambda(1,1,1) \\ (a,b,c)\in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \quad\quad +\lambda = x \\ \quad b \quad +\lambda = y \\ \quad\quad c+\lambda = z \\ a+b+c \quad = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \quad\quad +\lambda = x \\ \quad b \quad +\lambda = y \\ \quad\quad c+\lambda = z \\ \quad\quad 3\lambda = x+y+z \quad {\color{red} L_4 \leftarrow L_1+L_2+L_3-L_4} \end{cases}$$

On obtient : $(a,b,c)=\left(\dfrac{2x-y-z}{3}, \dfrac{-x+2y-z}{3}, \dfrac{-x-y+2z}{3}\right)$ et $\lambda=\dfrac{x+y+z}{3}$

- La projection $p$ est alors $(x,y,z)\mapsto(a,b,c)$, de matrice canoniquement associée :
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
- La symétrie $s$ est alors $(x,y,z)\mapsto(a,b,c)-(\lambda,\lambda,\lambda)$, de matrice canoniquement associée :
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

## 5.2 Propriétés

**Théorème 21 :** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$. On note $p$ et $s$ la projecteur et la symétrie sur $F$ parallèlement à $G$.

- $p$ est un endomorphisme de $E$ et $p^2=p$ (idempotence)
$$F=\operatorname{Im}p=\operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad G=\operatorname{Ker}p$$
- $s$ est un automorphisme de $E$ et $s^2=\mathrm{Id}_E \Leftrightarrow s^{-1}=s$ (involution)
$$F=\operatorname{Ker}(s-\mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad G=\operatorname{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$$

**Remarque :** Pour tout endomorphisme $f$ de $E$, on a :
$\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)=\{x\in E,\ f(x)=x\}$ et $\operatorname{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)=\{x\in E,\ f(x)=-x\}$

**Démonstration :**

- Pour les projecteurs : $x=y+z$, $p\left[p(x)\right]=p(y)=y=p(x)$
  $\operatorname{Im}p=F=\{x\in E,\ p(x)=x\}$ et $G=\{x\in E,\ p(x)=0_E\}=\operatorname{Ker}f$
- Pour les symétries : $x=y+z$, $s\left[s(x)\right]=s(y-z)=y-(-z)=y+z=x$

## 5.3 Caractérisation des projecteurs

**Théorème 22 :** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$

- Un endomorphisme $p$ est un projecteur si, et seulement si, $p^2 = p$
- Si $p$ est un projecteur, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires et $p$ est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$ :

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Ker} p}$$

**Démonstration :**

Montrons que si $p$ est un endomorphisme et si $p^2 = p$ alors $p$ est un projecteur.
Par analyse synthèse.

- **Analyse :** On suppose que $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Im} p$ et $z \in \operatorname{Ker} p$

$$p(x) = p(y+z) \overset{\text{linéarité}}{=} p(y) + p(z) \overset{z \in \operatorname{Ker} p}{=} p(y)$$

  Pour un certain $t \in E$, on a alors $y = p(t)$

$$y = p(t) \overset{p^2=p}{=} p\,[p(t)] = p(y) = p(x)$$

  On en déduit $z = x - y = x - p(x)$

- **Synthèse :** Posons $y = p(x)$ et $z = x - p(x)$

$$p\,[x - p(x)] \overset{\text{linéarité}}{=} p(x) - p\,[p(x)] \overset{p^2=p}{=} p(x) - p(x) = 0_E$$

  Donc $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$

- **Conclusion :** $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$

  Donc $p$ est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$

**Exemple :** Soit un polynôme $P$ de $\mathbb{R}[X]$ donc $P = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^k$

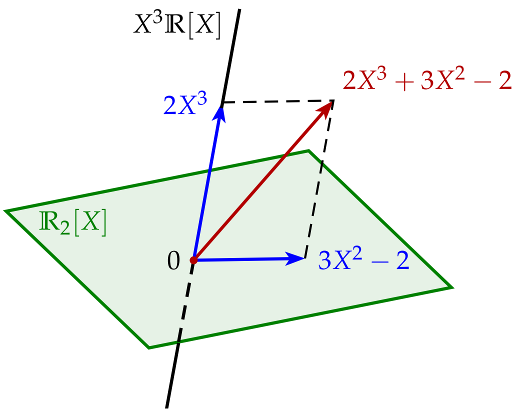
Soit l'application $t$, troncature à l'ordre 2, telle que : $t(P) = a_2X^2 + a_1X + a_0$

On vérifie facilement que $t$ est linéaire et $t^2 = t$.

Donc $t$ est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.

De plus $\operatorname{Im} t = \mathbb{R}_2[X]$ et $\operatorname{Ker} t = X^3\mathbb{R}[X]$.

$t$ est alors le projecteur de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}_2[X]$ parallèlement à $X^3\mathbb{R}[X]$



## 5.4 Caractérisation des symétries

**Théorème 23 :** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $s \in \mathscr{L}(E)$

- Un endomorphisme $s$ est une symétrie si, et seulement si, $s^2 = \text{Id}_E$
- Si $s$ est une symétrie, $\text{Ker}\,(s - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}\,(s + \text{Id}_E)$ sont supplémentaires et $s$ est la symétrie par rapport à $\text{Ker}\,(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}\,(s + \text{Id}_E)$

**Démonstration :** Montrons que si $s$ est un endomorphisme et si $s^2 = \text{Id}_E$ alors $s$ est une symétrie. Par analyse synthèse.

- **Analyse :** On suppose que $x = x^+ + x^-$ avec $\begin{cases} x^+ \in \text{Ker}\,(x - \text{Id}_E) \\ x^- \in \text{Ker}\,(x + \text{Id}_E) \end{cases}$

  donc $\begin{cases} s(x^+) = x^+ \\ s(x^-) = -x^- \end{cases} \Rightarrow s(x) = s(x^+ + x^-) \overset{\text{linéarité}}{=} s(x^+) + s(x^-) = x^+ - x^-$

  $$\begin{cases} x = x^+ + x^- \\ s(x) = x^+ - x^- \end{cases} \Rightarrow x^+ = \frac{x + s(x)}{2} \quad \text{et} \quad x^- = \frac{x - s(x)}{2}$$

- **Synthèse :** Posons $x^+ = \dfrac{x + s(x)}{2}$ et $x^- = \dfrac{x - s(x)}{2}$ donc $x = x^+ + x^-$

  $$s(x^+) = s\left(\frac{x + s(x)}{2}\right) \overset{\text{linéarité}}{=} \frac{s(x) + s[s(x)]}{2} \overset{s^2 = \text{Id}_E}{=} \frac{s(x) + x}{2} = x^+$$

  Donc $x^+ \in \text{Ker}\,(s - \text{Id}_E)$. On montre de même que $x^- \in \text{Ker}\,(s + \text{Id}_E)$
- **Conclusion :** $E = \text{Ker}\,(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}\,(s + \text{Id}_E)$

  Donc $s$ est la symétrie par rapport à $\text{Ker}\,(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}\,(s + \text{Id}_E)$

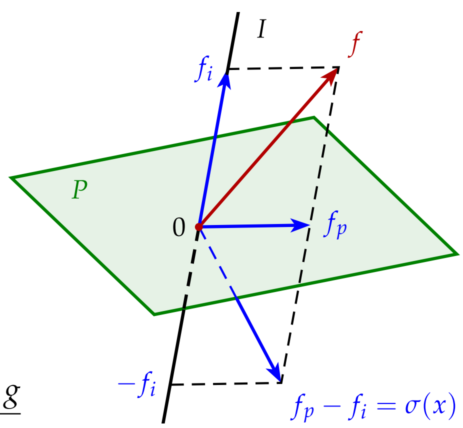
**Exemple :** Soit $\sigma \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f \longmapsto g \end{cases}$ avec $g : x \mapsto g(x) = f(-x)$

On vérifie facilement que $\sigma$ est linéaire et $s^2 = \text{Id}$.

$\sigma$ est donc une symétrie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$\text{Ker}\,(\sigma - \text{Id}) = P$ ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et
$\text{Ker}\,(\sigma + \text{Id}) = I$ ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$\sigma$ est alors la symétrie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par rapport à $P$ parallèlement à $I$.




**Remarque :** On retrouve un résultat que l'on avait montré en analyse : on peut décomposer toute fonction réelle en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire telle que :

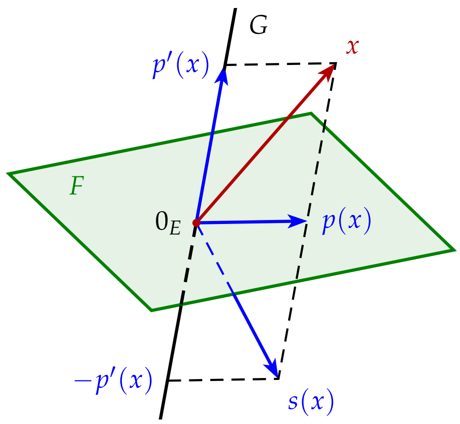
$$f = f_p + f_i \quad \text{avec} \quad f_p = \frac{f + g}{2} \quad \text{et} \quad f_i = \frac{f - g}{2}$$

## 5.5 Lien projecteur et symétrie

**Théorème 24 :** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$.

Soit $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$ et $p'$ le projecteur sur $G$ parallèlement à $F$ et $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$. On a alors :

$$p + p' = \mathrm{Id}_E, \quad p \circ p' = p' \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad et \quad s = 2p - \mathrm{Id}_E$$




## 5.6 Détermination d'une application linéaire sur une somme directe

**Théorème 25 :** Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

$E_1, \ldots, E_p$ des sous espaces vectoriels de $E$ et $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F), \ldots, f_p \in \mathscr{L}(E_p, F)$.

On suppose que $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.

Il existe une unique application $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que : $\forall k \in [\![1, p]\!], \ f_{|E_k} = f_k$

**Remarque :** L'idée est de décomposer l'application linéaire $f$ sur des sous-espaces vectoriels.

$$x = x_1 + \cdots + x_p \quad \Rightarrow \quad f(x) = f_1(x_1) + \cdots + f_p(x_p)$$

**Exemple :** Pour en revenir aux projecteurs et symétries : soit $E = E_1 \oplus E_2$

- $f_1 = \mathrm{Id}_{E_1}$ et $f_2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ : $f$ est le projecteur sur $E_1$ parallèlement à $E_2$
- $f_1 = \mathrm{Id}_{E_1}$ et $f_2 = -\mathrm{Id}_{E_2}$ : $f$ est la symétrie par rapport à $E_1$ parallèlement à $E_2$