Polynômes

Construction de l'anneau de polynôme

EXERCICE 1

Déterminer l'ensemble $U(\mathbb{K}[X])$ des éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$

EXERCICE 2

a) Déterminer, à l'aide d'une intégrale calculée de deux façons : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$

b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} P^{(k)}(X) X^{k+1}$ est la primitive de P s'annulant en 0.

EXERCICE 3

On note A l'ensemble des polynômes du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k X^k$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décrivant l'ensemble des suites presque nulles de réels positifs ou nuls.

Montrer que l'ensemble A est stable par produit.

EXERCICE 4

a) En utilisant le calcul des coefficients d'un produit de polynômes et la formule du binôme, simplifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{a}{k}\binom{b}{r-k}$, $a, b, r \in \mathbb{N}$

b) En déduire une simplification de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

EXERCICE 5

1) Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers.
Montrer que si x est une racine rationnelle de P alors x est un entier.

2) Applications

   a) Soit $n, d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que d n'est la puissance n-ième d'aucun entier.
   Montrer alors que $\sqrt[n]{d}$ est irrationnel.

   b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Le polynôme $X^3 + kX + 1$ peut-il avoir une racine rationnelle ?

EXERCICE 6

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$

1) Déterminer, en fonction des coefficients de P, une expression simple de :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| P\left(e^{it}\right) \right|^2 \mathrm{d}t$$

2) Applications
   a) On suppose P non nul, à coefficients entiers et $\forall u \in \mathbb{U},\ |P(u)| < \sqrt{2}$.
   Montrer P est un monôme.
   b) Que devient le résultat si $\forall u \in \mathbb{U},\ |P(u)| \leqslant \sqrt{2}$?

1 Division euclidienne

EXERCICE 7

Déterminer $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ pour que $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ soit divisible par $X^2 + 2$.

EXERCICE 8

Déterminer $a \in \mathbb{C}$ pour que $X^4 - X + a$ soit divisible par $X^2 - aX + 1$.

EXERCICE 9

1) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a, b \in \mathbb{C}$.
   Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$:
   a) si $a \neq b$
   b) si $a = b$
2) Application. Quel est le reste de la division euclidienne de $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

EXERCICE 10

Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^4$ pour tout $n \geqslant 4$

EXERCICE 11

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

a) On suppose que le reste de la division euclidienne de P
   - par $(X-1)$ est 3 ;
   - par $(X-2)$ est 7 ;
   - par $(X-3)$ est 13.

   Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$
b) On suppose que les restes de la division euclidienne de P
   - par (X^2+4) est $(X+1)$;
   - par $(X-3)$ est 14.

   Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X^2+4)(X-3)$

EXERCICE 12

Soient $n, k \in \mathbb{N}$. On désigne par r le reste de la division euclidienne de k par n.
Montrer que X^r est le reste de la division euclidienne de X^k par $(X^n - 1)$.

2 Racines et multiplicités

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la multiplicité de 1 dans $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$?

Exercice 14

Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{311} + X^{82} + X^{15}$.

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$

Exercice 16

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$, alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

Exercice 17

Déterminer $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^{2n} + X^n + 1$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 18

Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$:
$X^n \sin\theta - X\sin(n\theta) + \sin[(n-1)\theta]$ est divisible par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$

Exercice 19

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

3 Nombre maximal de racines

Exercice 20

1) Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad P(x) = \sqrt{x}$?

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sin x$?

c) $\forall x \in [0, 2\pi], \quad P(x) = \sin x$?

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = e^x$?

e) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$?

f) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = |x|$?

2) Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

a) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \bar{z}$?

b) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = |z|$?

Exercice 21

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $P(n) = n^2$

b) $P(n) = n^2 + (-1)^n$

Exercice 22

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n.

a) On suppose P unitaire et : $\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ P(k) = \dfrac{1}{k^2}$. Calculer $P(n+2)$.

b) On suppose $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(k) = \dfrac{k}{k+1}$. Calculer $P(n+1)$.

c) On suppose $\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ P(k) = \dfrac{1}{k}$. Calculer $P(0)$.

Exercice 23

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 1$ et $P(X^2+1) = P^2(X) + 1$

4 Équations polynomiales

Exercice 24

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$:

a) $P'P'' = 18P$

b) $P'^2 = 4P$

c) $(X^2+1)P'' = 6P$

d) $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$

Exercice 25

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$:

a) $P(X+1) = P(X)$

b) $P(X+1) - P(X) = X$

c) $(X+4)P(X) = XP(X+1)$

5 Polynômes scindés. Relations coefficients-racines

Exercice 26

Soit $n \geqslant 2$

a) Simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\sin\dfrac{k\pi}{n} = \dfrac{1}{2}\left|1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right|$

c) Simplifier alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$

Exercice 27

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P = (X+1)^n - e^{i\,2n\theta}$

a) Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.

b) En déduire que P est scindé sur $\mathbb{C}$.

c) Simplifier $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$

Exercice 28

Soient $p, q \in \mathbb{R}$. On pose $P = X^3 + pX + q$.

On note x, y, z les trois racines complexes de P comptées avec multiplicité.
Simplifier en fonction de p et de q les quantités suivantes :

a) $x^2 + y^2 + z^2$

b) $x^3 + y^3 + z^3$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ avec x, y, z non nuls

d) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$ avec x, y, z non nuls

Exercice 29

Soient $p, q \in \mathbb{R}$. On pose $P = X^3 + pX + q$.

On note x, y, z les trois racines complexes de P comptées avec multiplicité.

a) Montrer, à l'aide des relations coefficients-racines, que :

$$P'(x)P'(y)P'(z) = 4p^3 + 27q^2$$

b) À quelle condition nécessaire et suffisante sur p et q le polynôme P possède-t-il une racine multiple ?

Exercice 30

1) On note (S) le système d'inconnue (x, y, z) dans $(\mathbb{C}^*)^3$: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$

   On pose $P = (X - x)(X - y)(X - z)$.

   a) Si (x, y, z) est solution de (S), déterminer P explicitement.

   b) Résoudre alors (S).

2) Résoudre par la même méthode les systèmes suivants :

   a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xyz = 2 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$

EXERCICE 31

Polynômes de Tchebychev

On définit la suite (T_n) de polynômes suivant : $\begin{cases} T_0 = 1 \text{ et } T_1 = X \\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Déterminer le degré de T_n et calculer son coefficient dominant.
   b) Calculer le coefficient constant de T_{2n}
2) a) Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$
   b) Montrer que T_n est le seul polynôme de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la relation a) est vraie.
   c) En dérivant deux fois le relation a), montrer l'égalité :
   $$(X^2-1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$$
3) Pour cette question $n \geqslant 1$
   a) Déterminer toutes les racines de T_n dans $[-1;1]$.
   b) En déduire que T_n est scindé sur $\mathbb{R}$.
   c) Simplifier le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{2n-1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}$

6 Polynômes de Lagrange

EXERCICE 32

Soient $n \geqslant 2$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $L_1, \dots, L_n$ les polynôme de Lagrange associés.

Simplifier $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i L_i$

EXERCICE 33

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \ \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right)$$

EXERCICE 34

On note $L_1, \dots, L_n$, les polynômes de Lagrange de $1, 2, \dots, n$.

a) Pour tous $k \in [\![1, n]\!]$ exprimer le coefficient dominant de L_k au moyen de factorielles.
b) Exprimer de deux manières l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $d°P \leqslant n-1$ pour lequel $P(k) = k^{n-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
c) En déduire une simplification de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n$.