Matrices et systèmes linéaires

Table des matières

1 Matrices et opérations sur les matrices

1.1 Définition

Définition 1 : Soit $I = [\![1, n]\!]$ et $J = [\![1, p]\!]$

On appelle matrice (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$, une application $A \begin{cases} I \times J \to \mathbb{K} \\ (i, j) \longmapsto a_{ij} \end{cases}$ que l'on note sous forme d'un tableau de n lignes et de p colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{ij}) \ \text{ plus rarement } \ A_{ij}$$

Le coefficient a_{ij} se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.

L'ensemble des matrice (n, p) dans le corps $\mathbb{K}$ est noté : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Remarque :

- Pour $i \in I$, on note $L_i = (a_{i1}, \dots, a_{ip})$ la i-ème ligne de A.
- Pour $j \in J$, on note $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ la j-ème colonne de A.
- Si $n = p$, la matrice A est carrée de taille n et l'on note son ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
  La famille $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ est appelée diagonale de A.
- Si $n = 1$, on dit que la matrice A est une matrice ligne.
- Si $p = 1$, on dit que la matrice A est une matrice colonne.
- La matrice (n, p) dont tous les coefficients sont nuls est appelée matrice nulle et notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0.

⚠ Il est d'usage d'utiliser i pour indice ligne et j pour indice colonne.

1.2 Somme et produit par un scalaire

Définition 2 : Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On définit la combinaison linéaire suivante :

$$\forall \lambda, \mu, \quad \lambda A + \mu B = (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})$$

Remarque : L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ constitue un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Exemple : $3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

1.3 Produit matriciel

Définition 3 : Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

On définit le produit matriciel : $AB = (c_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,q}$ par $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} \\ & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \dots & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kq} \\ \vdots & & \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{pkb_{k1}} & \dots & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{nk}b_{nq} \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque :

- On ne peut effectuer ce produit s'il y a compatibilité des formats :

$$\boxed{\text{matrice } (n\,,\,p) \;\times\; \text{matrice } (p\,,\,q) \;=\; \text{matrice } (n\,,\,q)}$$

- Le produit matriciel avec des matrices carrées ne change par le format. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit.
- Le produit matriciel n'est pas commutatif.
- Le produit matriciel peut être nul avec A et B non nulles : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple :

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 7 & -3 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ (3,2)\times & (2,3) & = & (3,3) \end{array}$$

Théorème 1 : Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathbb{K}^p$ et $i \in [\![1,n]\!]$, $j \in [\![1,p]\!]$

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{jj} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = C_j \quad \text{d'où} \quad AX = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \times A = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix} = L_i$$

Remarque : Par convention, on ne met pas les zéros dans une matrice lorsque celle-ci en contient beaucoup.

1.4 Propriétés du produit matriciel

Théorème 2 : En tenant compte de la compatibilité, le produit matriciel est :

- Associatif : $\forall A, B, C$ matrices $(AB)C = A(BC) = ABC$
- Bilinéaire : $\forall A, B, C$ matrices $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC \quad \text{et} \quad A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$$

- Possède un élément neutre :
  On appelle matrice identité de taille n, la matrice carrée : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
  $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\ :\ I_n A = A I_p = A$

Remarque :

- On appelle aussi la matrice identité la matrice unité.
- On peut noter la matrice identité avec le symbole de Kronecker : $I_n = (\delta_{ij})$

Exemple : Soit M et J deux matrices carrées d'ordre n où J ne possède que des coefficients égaux à 1. On a alors $JMJ = \lambda J$ où λ est la somme de tous les coefficients de M :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k\ell}\right) & \dots & \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k\ell}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k\ell}\right) & \dots & \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k\ell}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k\ell}\right) J$$

1.5 Transposée

Définition 4 : Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ telle que $A = (a_{ij})$.

On appelle transposée de A la matrice notée, ${}^tA$ ou A^T, dont on a inversé lignes et colonnes :

$${}^tA \in \mathscr{M}_{p,n} \quad \text{et} \quad {}^tA = (a_{ji})$$

- Linéarité : $\forall A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ :\ {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\,{}^tA + \mu\,{}^tB$
- Produit : $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})\ :\ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Exemple : ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Démonstration : Transposée du produit :

$$\left[{}^t(AB)\right]_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{ji}b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{p} ({}^tB_{ik})({}^tA_{kj}) = ({}^tB\,{}^tA)_{ij}$$

1.6 Matrice définies par blocs

Définition 5 : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,q}$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}$, $C \in \mathcal{M}_{n,r}$ et $D \in \mathcal{M}_{p,r}$

On définit la matrice $M \in \mathcal{M}_{n+p\,,\,q+r}(\mathbb{K})$ à l'aide de A, B, C et D par :

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \overset{q}{\leftrightarrow} & \overset{r}{\leftrightarrow} \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \updownarrow \\ p \updownarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \end{array}$$

Produit de matrices définies par blocs : avec compatibilité des formats

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \overset{q}{\leftrightarrow} & \overset{r}{\leftrightarrow} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{matrix} q \updownarrow \\ r \updownarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + CB' & AC' + CD' \\ BA' + BB' & DC' + DD' \end{pmatrix}$$

Remarque : Tout se passe avec les blocs comme avec les scalaires.

1.7 Matrices carrées

Théorème 3 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent.

On peut alors utiliser la formule du binôme : $(A+B)^m = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} A^i B^{m-i}$

Remarque : A l'ordre 2 : $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \overset{AB=BA}{=} A^2 + 2AB + B^2$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il est clair que $A = I_3 + J$, et $J^2 = 0 \;\Rightarrow\; J^i = 0,\; i \geqslant 2$

Comme la matrice identité commute avec toute matrice, d'après la formule du binôme :

$$A^n = (I_3 + J)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} I_3^i J^{n-i} = \binom{n}{n-1} I_3^{n-1} J^1 + + I_3^n J^0 = nJ + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 4n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 6 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est symétrique si ${}^tA = A$
- On dit que A est antisymétrique si ${}^tA = -A$

Remarque : Si A est antisymétrique alors sa diagonale est nulle.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Définition 7 : Matrice diagonale, scalaire et triangulaires.

- Un matrice carrée est diagonale si tous ses coefficients non diagonaux sont nuls.
- Un matrice carrée est scalaire si elle est de la forme $\lambda I_n, \quad \lambda \in \mathbb{K}$
- Une matrice carrée est triangulaire supérieures (resp. inférieure) si ses coefficients situé au dessous (resp. au dessus) de sa diagonale sont nuls

Exemples :

- Matrice diagonale : $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$
- Matrice scalaire : $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$
- Matrice triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$
- Matrice triangulaire inférieure $\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Théorème 4 : Toute combinaison linéaire et tout produit de matrice triangulaires supérieures (resp. inférieure) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure)

1.8 Trace d'une matrice carrée

Définition 8 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle trace de A, notée $\text{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A.

- Linéarité : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$
- Produit de matrices : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Démonstration : Produit de matrices :

$$\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} b_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{\ell k} a_{k\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} (BA)_{\ell\ell} = \text{tr}(BA)$$

2 Systèmes linéaires

2.1 Définition

Définition 9 : Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$.
Le système $(n \times p)$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ défini par :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

peut s'écrire matriciellement comme : $AX = B$
Le système est dit homogène si $B = 0 \;\; (0_{\mathbb{K}^n})$.
L'application de $\mathbb{K}^p$ dans K^n : $X \longmapsto AX$ est linéaire :

$$\forall X, Y \in \mathbb{K}^p,\;\; \lambda, \mu \in \mathbb{K},\;\; A(\lambda X + \mu Y) = \lambda(AX) + \mu(AY)$$

Exemple : Soit le système : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 4 \end{cases}$

2.2 Ensemble solution

Théorème 5 : Soient $A \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$.
Le système $AX = B$, avec $X \in \mathbb{K}^p$ est

- Soit incompatible s'il n'a pas de solution.
- Soit compatible. Les solutions peuvent alors se décomposer selon le principe :

Solution générale de $AX = B$	$=$	Solution particulière	$+$	Solution générale de $AX = 0$

Démonstration :
Soit le système $AX = B$ compatible dont X_{part} est une solution particulière :

$$\begin{aligned} AX = B \;\Leftrightarrow\;& AX = AX_{\text{part}} \;\Leftrightarrow\; A(X - X_{\text{part}}) = 0 \\ \Leftrightarrow\;& X - X_{\text{part}} \text{ est une solution } X_{\text{hom}} \text{ du système homogène associé} \\ \Leftrightarrow\;& X = X_{\text{part}} + X_{\text{hom}} \end{aligned}$$

Exemple : Solution du système (S) : $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 4 \end{cases}$

- $X = (1, 0, 0)$ est une solution particulière de (S)
- Le système homogène associé est :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -3z \\ 4x + 5y = -6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 8y = 12z \\ 4x + 5y = -6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

- Les solutions de (S) sont :

$$X = \underbrace{(1, 0, 0)}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{(z, -2z, z)_{z \in \mathbb{K}}}_{\text{sol. syst. hom.}} = (1, 0, 0) + \text{Vect}\left[(1, -2, 1)\right]$$

Remarque : On rappelle que $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ \ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$.
Géométriquement $\text{Vect}\left[(1, -2, 1)\right]$ est la droite de vecteur directeur $(1, -2, 1)$

2.3 Algorithme du pivot

On passe d'un système (S) à un système (S') équivalent par combinaison de lignes. On adopte les conventions suivantes :

opération élémentaire	codage
Échange des lignes i et j	$L_i \leftrightarrow L_j$ (permutation)
Multiplication de la ligne i par λ ($\lambda \neq 0$)	$L_i \leftarrow \lambda L_i$ (dilatation)
Addition de la ligne i d'un multiple de la ligne j	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (transvection)

Propriété 1 : Il s'agit par étapes successives de transformer un système (S) en un **système échelonné** (S') qui lui est équivalent.

Soit l'inconnue du système : $X = (x_1\ ,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_p)$.

- On place par permutation en L_1 une ligne où le coefficient de x_1 est non nul. Ce coefficient est appelé pivot (il est préférable que ce coefficient soit égal à 1).
On élimine x_1 dans $L_2, L_3, \dots, L_n$ par transvection de L_i et L_1.
On simplifie éventuellement par dilatation et l'on élimine les lignes nulles.
- S'il existe parmi $L_2, L_3, \dots, L_n$ une ligne où le coefficient de x_2 est non nul, on la place par permutation dans L_2 et on utilise ce coefficient comme nouveau pivot (il est préférable que ce coefficient soit égal à 1).
On élimine x_2 dans $L_3, L_4, \dots, L_n$ par transvection de L_i et L_2.
On simplifie éventuellement par dilatation et l'on élimine les lignes nulles.
- On réitère ce procédé jusqu'à obtenir une forme échelonnée du système.
Si $n = p$ on obtient un système triangulaire
- On remonte par transvection ensuite cette forme pour obtenir les solutions.

Exemples :

- Résolution de : $\begin{cases} 9x - 3y + 3z = 0 \\ -5x + y - 6z = -1 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$ Solution : $X = (3\,;\,8\,;-1)$

$$\begin{cases} 9x - 3y + 3z = 0 \\ -5x + y - 6z = -1 \\ x + y + z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}\,x + y + z = 10 & L_1 \leftarrow L_3 \\ 9x - 3y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_1 \\ -5x + y - 6z = -1 & L_3 \leftarrow L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 10 \\ -12y + 6z = -90 & L_2 \leftarrow L_2 - 9L_1 \\ 6y - z = 49 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 10 \\ \boxed{2}\,y + z = 15 & L_2 \leftarrow -\dfrac{1}{6}L_2 \\ 6y - z = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2y + z = 15 \\ -4z = 4 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ y = \dfrac{15 - z}{2} = 8 \\ x = 10 - y - x = 3 \end{cases}$$

- Résolution de : $\begin{cases} 2x + y - z - t = -18 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + y - 7z + 13t = -40 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + y - z - t = -18 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + y - 7z + 13t = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}\,x + y + z + t = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x + y - z - t = -18 \\ x + y - 7z + 13t = -40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -y - 3z - 3t = -18 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -8z + 12t = -40 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + 3z + 3t = 18 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ 2z - 3t = 10 & L_3 \leftarrow -\dfrac{1}{4}L_3 \end{cases}$$

On remonte ensuite le système échelonné : $\begin{cases} z = 5 + \dfrac{3}{2}t \\ y = 18 - 3z - 3t = 3 - \dfrac{15}{2}t \\ x = -y - z - t = -8 + 5t \end{cases}$

Les solutions sont : $X = \underbrace{(5\,,\,3\,,-8\,,\,0)}_{\text{Sol. part. } t=0} + \underbrace{\text{Vect}\left[\left(5\,,-\dfrac{15}{2}\,,\,\dfrac{3}{2}\,,\,1\right)\right]}_{\text{sol. syst. hom.}}$

3 Matrices inversibles

3.1 Définition

Définition 10 : Soit $A\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $AB = BA = I_n$.

Si la matrice B existe, elle est unique. Elle est appelée inverse de A et est noté A^{-1}.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, est appelé groupe linéaire de degré n sur $\mathbb{K}$ et est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration : Unicité : Soit B et B' deux matrices inverses de A :

$$B = BI_n \overset{AB'=I_n}{=} B(AB') = (BA)B' \overset{BA=I_n}{=} I_nB' = B'$$

Remarque :

- Toute matrice carrée avec une ligne ou une colonne nulle n'est pas inversible.
- Une matrice diagonale dont les coefficient sont non nuls est inversible :

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

Définition 11 : Système de Cramer

Un système linéaire est dit de Cramer si sa matrice est inversible.

$$\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \ B \in \mathbb{K}^n,\ \ AX = B \ \Leftrightarrow\ X = A^{-1}B$$

Remarque : La matrice A d'un système linéaire $AX = Y$ est inversible si, et seulement si, pour toute matrice Y le système admet une unique solution.

Il suffit alors de résoudre un système pour connaître la matrice inverse.

Pour l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ on résout $\begin{cases} 9x - 3y + 3z = a \\ -5x + y - 6z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$

$$\begin{cases} 9x-3y+3z=a \\ -5x+y-6z=b \\ x+y+z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}\, x+y+z=c & L_1 \leftarrow L_3 \\ 9x-3y+3z=a & L_2 \leftarrow L_1 \\ -5x+y-6z=b & L_2 \leftarrow L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=c \\ 12y+6z=9c-a & L_2 \leftarrow 9L_1-L_2 \\ 6y-z=5c+b & L_3 \leftarrow 5L_1+L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=c \\ \boxed{2}\, y+z=\frac{3}{2}c-\frac{1}{6}a & L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \\ 6y-z=5c+b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=c \\ 2y+z=\frac{3}{2}c-\frac{1}{6}a \\ 4z=-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a-b & L_3 \leftarrow 3L_2-L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=-\frac{1}{8}a-\frac{1}{4}b-\frac{1}{8}c & L_1 \leftarrow L_3 \\ y=-\frac{1}{48}a+\frac{1}{8}b+\frac{13}{16}c \\ x=\frac{7}{18}a+\frac{1}{8}b+\frac{5}{16}c & L_3 \leftarrow L_1 \end{cases}$$

On trouve alors $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{7}{48} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ -\frac{1}{48} & \frac{1}{8} & \frac{13}{16} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$ Cela est un peu calculatoire !

3.2 Matrices inversibles d'ordre 2

Théorème 6 : Soit $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ et $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

- On appelle déterminant de A le scalaire noté $\det(A)=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc$
- La matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(A)\neq 0$. On a alors :

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Remarque : Pour ce souvenir de la formule de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2, on retiendra que l'on prend l'inverse du déterminant, on permute les coefficients de la 1re diagonale et l'on prend les opposés dans la 2e.

Théorème 7 : **Formules de Cramer** pour un système (2×2).

Soit le système (S) : $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ avec $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$

Le système (S) admet une unique solution (x, y) telle que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\delta} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\delta}$$

Remarque :

- Pour se souvenir de ces formules, on retiendra que le dénominateur est toujours δ et pour le numérateur, dans x, on remplace la 1re colonne du déterminant par le second membre $\binom{c}{c'}$ tandis que dans y c'est la 2e colonne que l'on remplace.
- Ces formules sont purement théoriques et sont très « lourdes » à utiliser dans la résolution d'un système. C'est la raison pour laquelle, elle ne sont plus enseignées au lycée.

Démonstration : Si $\delta \neq 0$ alors la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ est inversible, donc d'après le système de Cramer :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{ab' - ba'} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{ab' - ba'} \begin{pmatrix} cb' - bc' \\ ac' - ca' \end{pmatrix}$$

3.3 Opération sur les matrices inversibles

Théorème 8 : Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

- Inversibilité de l'inverse : $(A^{-1})^{-1} = A$
- Inversibilité du produit : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Inversibilité d'une puissance : $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k, \;\; k \in \mathbb{Z}$
- Inversibilité de la transposée : $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Démonstration :

- Inverse : immédiat d'après la définition.
- Produit : $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$
  de même $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$
- Puissance : Récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ à partir du produit puis avec l'inverse $k \in \mathbb{Z}$.
- Transposée : $({}^tA)\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n = I_n$ de même $({}^tA^{-1})\,({}^tA) = I_n$

3.4 Opérations sur les lignes et colonnes

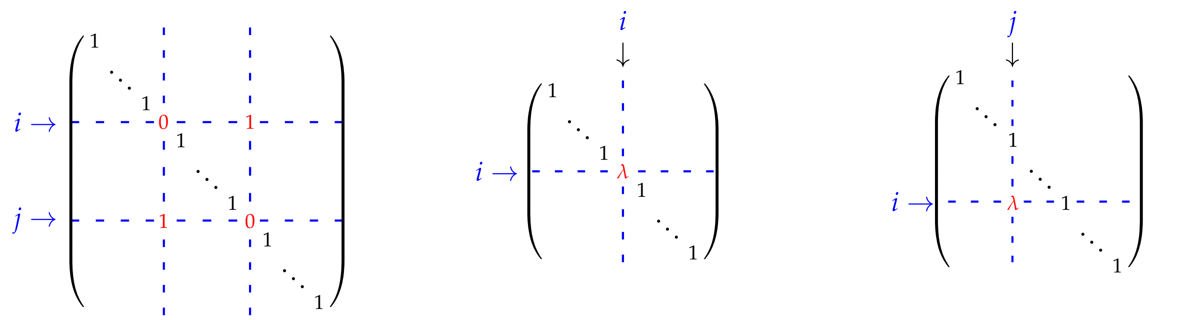
Définition 12 : Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $I = [\![1, n]\!]$ et $J = [\![1, p]\!]$.

On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

La famille $(E_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Application : En fonction de cette base, on va définir les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. On définit alors des matrices de passage :

- Permutation : $P_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i} + I_n - E_{i,i} - E_{j,j}$
- Dilatation : $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$, $\lambda \neq 0$
- Transvection : $T_{i,j)}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$



Matrice permutation $P_{i,j}$ Matrice dilatation $D_i(\lambda)$ Matrice transvection $T_{i,j}(\lambda)$

Remarque :

- Si la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ n'est pas carrée, prendre p au lieu de n pour les opérations sur les colonnes.
- Ces opérations étant réversibles, ces trois matrices de passage sont inversibles :

$$P_{i,j}^{-1} = P_{i,j} \quad , \quad D_i^{-1}(\lambda) = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{et} \quad T_{i,j}^{-1}(\lambda) = T_{i,j}(-\lambda)$$

opération	**codage**	**matrice de passage**
permutation	$L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$	$P_{i,j}$
dilatation	$L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$	$D_i(\lambda)$
transvection	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$T_{i,j}(\lambda)$

Application :

- Si l'on fait des opérations sur les **lignes** on multiplie A à **gauche** par $P_{i,j}$, $D_i(\lambda)$ ou $T_{i,j}(\lambda)$.
- Si l'on fait des opérations sur les **colonnes** on multiplie A à **droite** par $P_{i,j}$, $D_i(\lambda)$ ou $T_{i,j}(\lambda)$.

Théorème 9 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Si l'on peut transformer A en I_n par des opérations élémentaires alors ces mêmes opérations permettent de transformer I_n en A^{-1}

Remarque : C'est une autre méthode pour déterminer l'inverse d'une matrice.

⚠ On opère soit sur les lignes, soit sur les colonnes mais pas sur les deux !

Exemple : **Méthode Gauss-Jordan :** variante du pivot de Gauss
On combine toutes les lignes avec le pivot pas seulement les lignes supérieures.

Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On choisit de travailler sur les lignes (colonne après colonne) pour obtenir la matrice identité à partir de A. Un travail sur les colonnes serait tout aussi judicieux.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -6 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 9L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{12}L_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3 \end{matrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{7}{48} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ -\frac{1}{48} & \frac{1}{8} & \frac{13}{16} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

3.5 Matrices triangulaires inversibles

Théorème 10 : Matrices triangulaires inversibles

Une matrice triangulaire A est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, A^{-1} est elle aussi triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de A.

Démonstration : Sur les matrices supérieures. (Les matrices inférieures se déduisent par transposition).

Récurrence sur la taille de la matrice. Soit A_n une matrice triangulaire de taille n.

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (A_n \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad a_{ii} \neq 0)$

Initialisation : : $n = 1$. La matrice (a) est triangulaire supérieur et inversible si, et seulement si, $a \neq 0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par double implication

Supposons l'équivalence vraie à l'ordre n.

Montrons alors qu'elle est vraie à l'ordre $(n+1)$. On a : $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix}$

avec $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $d \in \mathbb{K}$

- A_{n+1} inversible.

  $A_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} A'_n & C' \\ B' & d' \end{pmatrix}$ avec $B' \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K}), \quad C' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $d' \in \mathbb{K}$

  $$A_{n+1}A_{n+1}^{-1} = I_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A_n & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A'_n & C' \\ B' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$$
  $$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A_nA'_n + CB' & A_nC' + Cd' \\ dB' & dd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$$

  - $dd' = 1 \quad \Rightarrow \quad d \neq 0$
  - $dB' = 0_{1,n} \quad \Rightarrow \quad B' = 0_{1,n}$ car $\quad d \neq 0$
  - $B' = 0_{1,n} = 0_{1,n} \quad \Rightarrow \quad A_nA'_n = I_n \quad \Rightarrow \quad A_n$ inversible

  D'après l'hypothèse de récurrence tous les coefficients diagonaux de A_n sont non nuls et comme $d \neq 0$, tous les coefficient diagonaux de A_{n+1} sont non nuls.

- A_{n+1} a ses coefficient diagonaux non nuls donc $d \neq 0$ et d'après l'hypothèse de récurrrence A_n est inversible.

  $$\begin{pmatrix} A_n & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_n^{-1} & -\frac{1}{d}A_n^{-1}C \\ 0_{1,n} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_nA_n^{-1} & -\frac{1}{d}A_nA_n^{-1}C + \frac{1}{d}C \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}$$

  On vérifie de même : $\begin{pmatrix} A_n^{-1} & -\frac{1}{d}A_n^{-1}C \\ 0_{1,n} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_n & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix} = I_{n+1}$

  A_{n+1} est inversible.

Par initialisation et hérédité l'équivalence est donc vérifiée pour tous $n \in \mathbb{N}^*$.