Déterminants

Table des matières

Introduction

Nous avons rencontré la notion de déterminant dans les systèmes $(2,2)$ ou $(3,3)$ pour savoir s'il y avait une solution unique et dans le plan ou l'espace vectoriel pour connaître la colinéarité de deux vecteurs ou la coplanarité de 3 vecteurs.

Nous allons généraliser cette notion à la dimension n en nous éloignant de la notion de résolution d'un système ou le lien entre vecteurs.

La définition de déterminant est une notion un peu complexe qui fait intervenir une forme **multilinéaire alternée** et la **signature d'une permutation**. Il est nécessaire de passer un peu de temps pour bien comprendre ces notions qui sont un peu abstraite au premier abord.

1 Formes multilinéaires alternées

1.1 Forme n-linéaire

Définition 1 : Soit $E_1, E_2,\dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On dit que $f : E_1, \times E_2 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire si f est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Remarque : Si $n = 2$ on dit que f est une forme bilinéaire.

Exemples :

- Dans l'espace le produit scalaire $(\vec{u}, \vec{v}) \to \vec{u} \cdot \vec{v}$ est une forme bilinéaire.
- Dans le plan le déterminant $(\vec{u}, \vec{v}) \to \det(\vec{u}, \vec{v})$ est une forme bilinéaire.

1.2 Forme n-linéaire alternée

Définition 2 : E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire de E^n.

On dit que f est une forme n-linéaire alternée si f est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.

Remarque : Cette définition curieuse dans le sens où l'on ne « voit » pas d'alternance va prendre tout son sens avec le 3e alinéa du théorème suivant :

Théorème 1 : E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire alternée de E^n.

- f est nulle sur toute famille liée.
- On ne change pas la valeur de f quand on ajoute à l'une de ses variable une combinaison linéaire des autres.
- f est antisymétrique, i.e. on obtient la valeur opposée si l'on permute deux variables :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E,\ \ i, j \in [\![1, n]\!], \quad f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$$

Remarque : Le caractère alternée est indissociable de l'antisymétrie de f.

Démonstration : Cela découle de la linéarité de f pour chaque variable.

- (x_i) liée $\Rightarrow \quad \exists k \in [\![1,n]\!],\ \ x_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$

$$f(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,\sum_{i\neq k}\lambda_i x_i,\dots,x_n)$$
$$\overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{i\neq k}\lambda_i f(\overbrace{x_1,\dots,x_{k-1},x_i,x_{k+1},\dots x_n}^{x_i \text{ apparaît deux fois}}) = 0$$

- $x_k \to x_k + \sum_{i\neq k}\lambda_i x_i$

$$f(\dots,x_k+\sum_{i\neq k}\lambda_i x_i n\dots) \overset{\text{linéarité}}{=} f(\dots,x_k,\dots)+\overbrace{f(\dots,\sum_{i\neq k}\lambda_i x_i,\dots)}^{=0\ \ (1^{\text{er}}\text{ alinéa})} = f(\dots,x_k,\dots)$$

- $x_i \to x_i + x_j$ et $x_j \to x_j + x_i$:

$$\overbrace{f(\dots,x_i+x_j,\dots,x_j+x_i,\dots)}^{=0} \overset{\text{linéarité}}{=} f(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)+\overbrace{f(\dots,x_i,\dots,x_i,\dots)}^{=0}+$$
$$\overbrace{f(\dots,x_j,\dots,x_j,\dots)}^{=0}+f(\dots,x_j,\dots,x_i,\dots)$$

On a alors : $f(\dots,x_j,\dots,x_i,\dots) = -f(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)$

1.3 Expression d'une forme n-linéaire alternée

Définition 3 : On appelle groupe symétrique d'ordre n, noté S_n, le groupe formé par toutes les permutations σ de $[\![1,n]\!]$

Théorème 2 : E un espace de dimension $n \neq 0$ de base $\mathscr{B} = (e_1,e_2,\dots,e_n)$, (x_i) une famille de n vecteurs de E de matrice $A = (a_{ij})$ dans $\mathscr{B}$ et S_n le groupe symétrique de degré n.

On a alors : $f(x_1,\dots,x_n) = \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\,i}\right) f(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$

Remarque : L'expression est complexe et a de quoi dérouter. Analysons en détail cette égalité.

On exprime chaque vecteurs x_i dans la base de E : $x_i = \displaystyle\sum_{k_i=1}^{n} a_{k_i\,i}\,e_{k_i}$.

Chaque indice de sommation k_i est différent pour chaque x_i.

$$f(x_1,\dots,x_n) = f\left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1\,1}\,e_{k_1},\dots,\sum_{k_n=1}^{n} a_{k_n\,n}\,e_{k_n}\right)$$
$$\overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{k_1,\dots,k_n} a_{k_1\,1}\dots a_{k_n\,n}\,f(e_{k_1},\dots,e_{k_n})$$

Du caractère alternée de f, dès que deux e_{k_i} sont égaux, $f(e_{k_1}, \dots, e_{k_n}) = 0$.
On ne retient donc que les n-listes (k_i) d'éléments distincts c'est à dire les permutations σ de $[\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) = k_i$. Avec cette notation, on obtient bien :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\,i} \right) f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

Le caractère antisymétrique de f s'applique alors au calcul de $f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$

Par exemple, $n = 3$ et la permutation σ suivante : $\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 1$:

$$f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}) = f(e_2, e_3, e_1) \overset{e_1 \leftrightarrow e_2}{=} -f(e_1, e_3, e_2) \overset{e_2 \leftrightarrow e_3}{=} +f(e_1, e_2, e_3)$$

Étudions maintenant ce groupe des permutations.

2 Groupes symétriques

2.1 Notation

Définition 4 : Soit la permutation σ de $[\![1, n]\!]$.

On écrit cette permutation sous la forme matricielle : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Exemple :

- Dans $[\![1, 4]\!]$, la permutation σ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 4,\ \sigma(3) = 1,\ \sigma(4) = 3$$

- On peut composer deux permutation successives $\sigma' \circ \sigma$

$$\sigma' \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

⚠ La composition se lit de droite à gauche.

- On peut retrouver facilement la permutation inverse en allant de bas en haut.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2 Support d'une permutation, permutations disjointes

Définition 5 : Soit $\sigma \in S_n$.

- On appelle support de σ l'ensemble, noté $\text{supp}(\sigma)$, des éléments de $[\![1, n]\!]$ qui ne sont pas fixés par σ :

$$\text{supp}(\sigma) = \{x \in [\![1, n]\!],\ \ \sigma(x) \neq x\}$$

- Deux permutations de $[\![1, n]\!]$ sont disjointes si leurs supports sont disjoints.

  Propriété : Deux permutations disjointes commutent.

Démonstration : Montrons la commutativité de deux permutations disjointes.

Soit $\sigma, \sigma' \in S_n$:

- Si $x \notin \mathrm{supp}(\sigma) \cup \mathrm{supp}(\sigma')$ $\Rightarrow$ $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma(x) = x$ et $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma'(x) = x$
- Si $x \in \mathrm{supp}(\sigma) \overset{\sigma,\sigma' \text{ disjointes}}{\Leftrightarrow} x \notin \mathrm{supp}(\sigma') \Rightarrow \sigma'(x) = x \Rightarrow$
  $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma(x)$ et $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma(x)$
- Si $x \in \mathrm{supp}(\sigma')$ même démarche.

Exemple : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{supp}(\sigma) = \{1, 2, 4\}$

2.3 Cycle et transposition

Définition 6 : Soit $p \in [\![2, n]\!]$ et $\sigma \in S_n$.

- On appelle p-cycle ou cycle de longueur p toute permutation σ pour laquelle il existe p éléments distincts $x_p \in [\![1, n]\!]$ tels que :

$$\begin{cases} \sigma(x_1) = x_2, \quad \sigma(x_2) = x_3, \quad \dots, \quad \sigma(x_{p-1}) = x_p, \quad \sigma(x_p) = x_1 \\ \sigma(x) = x \quad \text{si} \quad x \notin \{x_1, \dots, x_p\} \end{cases}$$

  Un tel p-cycle est noté $(x_1\ x_2\ \dots\ x_p)$ et $\mathrm{supp}(\sigma) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$
- Un 2-cycle de $[\![1, n]\!]$ est appelé **transposition** de $[\![1, n]\!]$

Remarque : La notation d'un p-cycle est à l'ordre du premier terme près :

$$(1\,5\,2) = (5\,2\,1) = (2\,1\,5)$$

Exemples :

- Dans $[\![1, 7]\!]$, le p cycle de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ est $(2\,3\,4\,5)$
- Composition de plusieurs cycle : $(1\,2\,5)(1\,2)(3\,4\,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

  ⚠ Pour une composition aller de la droite vers la gauche.

Théorème 3 : Soit $\sigma \in S_n$.

Toute permutation σ peut être décomposer d'une seule manière (à l'ordre des cycles près) comme produit de cycles disjoints.

Remarque : Comme des supports disjoints commutent, les cycles étant disjoints commutent également.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\,5\,4)(3\,6) = (3\,6)(1\,5\,4)$

Théorème 4 : Le groupe symétrique est engendré par ses transposition.

Toute permutation $\sigma \in S_n$ peut être décomposé comme produits de transpositions.

Remarque :

- Pour permuter n objet, on peut toujours le faire progressivement par l'échange de deux objets.
- Cette décomposition n'est pas unique : $(1\,2\,3) = (1\,2)(2\,3) = (1\,3)(1\,2)$.

  En effet pour transformer 2 3 1 en 1 2 3 on peut échanger 1 et 2 puis 2 et 3 ou échanger 1 et 3 puis 1 et 2.
- Même le nombre de transpositions n'est pas unique, en effet :
$$\begin{aligned}(1\,4\,5\,2) &= (1\,2)(4\,5)(1\,5)\\ &= (1\,4)(5\,2)(4\,3)(2\,4)(2\,3)\end{aligned}$$
- Cette décomposition a une analogie avec le tri d'entiers uniquement à l'aide d'échanges (cf tri à bulle) : pour trier 4 1 3 5 2 $\rightarrow$ (4 1)(5 2)(4 2)

4	1	3	5	2	on échange 4 et 1	(4 1)
1	4	3	5	2	on échange 5 et 2	(5 2)
1	4	3	2	5	on échange 4 et 2	(4 2)
1	2	3	4	5		

2.4 Signature

Théorème 5 : On appelle signature, notée ϵ, l'unique morphisme de groupe de $(S_n, \circ)$ dans $(\{-1;1\}, \times)$ qui à toutes transposition de S_n associe la valeur (-1).
$$\forall \sigma, \sigma' \in S_n, \quad \epsilon(\sigma \circ \sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$$

On dit que σ est paire si $\epsilon(\sigma) = 1$ et impaire si $\epsilon(\sigma) = -1$

Remarque : La signature d'une transposition nous donne la parité du nombre de transpositions nécessaires pour définir une permutation et ce malgré la non unicité de ce nombre.

Théorème 6 : La signature d'un p-cycle de $[\![1, n]\!]$ est $(-1)^{p-1}$

Démonstration : D'après la définition d'un p-cycle :
$$(x_1 \ \ldots \ x_p) = (x_1\, x_2)(x_2\, x_3)\ldots(x_{p-1}\, x_p)$$

Un p-cycle fait intervenir $(p-1)$ transpositions d'où une signature de $(-1)^{p-1}$

Exemple : $\epsilon((2\,4\,6\,1)) = (-1)^{4-1} = -1$

Théorème 7 : Soit f une forme n-linéaire de E^n.
f est alternée si, et seulement si :
$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \ \ \sigma \in S_n, \quad f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$$

Remarque : On peut alors simplifier l'expression d'une forme n-linéaire alternée

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\,i} \right) f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\,i} \right) f(e_1, \dots, e_n)$$

3 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

3.1 Définition

Définition 7 : Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

On appelle déterminant d'une famille (x_i) de n vecteurs de E de matrice (a_{ij}) dans B, la valeur prise en (x_i) par l'unique forme n-linéaire alternée φ tel que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$:
$$\det{}_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\,i}$$

Remarque : Soit f une forme n-linéaire alternée de E^n, alors : $f = f(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$

3.2 Changement de base

Théorème 8 : Soient $E \neq \{0_E\}$ un K-espace vectoriel de dimension n et B et B' deux bases de E et (x_i) une famille de n vecteurs de E.

- $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \det_B(B') \det_{B'}(x_1, \dots, x_n)$ et $\det_{B'}(B) = \dfrac{1}{\det_B(B')}$
- $(x_1, \dots, x_n)$ base $\Leftrightarrow$ $\det_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$

Démonstration :

- Comme $\det_B$ est une forme n-linéaire alternée, en l'exprimant en fonction de B', on obtient : $\det_B = \det_B(B') \det_{B'}$

  La valeur en (x_i) est alors : $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \det_B(B') \det_{B'}(x_1, \dots, x_n)$

  Si $(x_i) = B$:

  $\det_B(B) = \det_B(B') \det_{B'}(B)$ or $\det_B(B) = 1$ donc $\det_{B'}(B) = \dfrac{1}{\det_B(B')}$

- Si (x_i) est une base alors : $\det_B(x_1, \dots, x_n) \det_{(x_i)}(B) = \det_B(B) = 1$ donc
$$\det{}_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$
Réciproquement, par la contraposée, si (x_i) n'est pas une base alors (x_i) est liée et comme $\det_B$ est une forme n-linéaire alternée $\det{}_B(x_1, \dots, x_n) = 0$

3.3 Déterminant en dimension 2 et 3

Théorème 9 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 de base B
Si $x(x_1, x_2)$ et $y(y_1, y_2)$ dans la base B alors :
$$\det{}_B(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Remarque : On retrouve ainsi notre déterminant classique à l'aide de la définition générale.

Démonstration :

- Les seules permutations σ de S_2 sont : Id et $(1\,2)$ de signature 1 et -1.
- $\det_B(x, y) = \sum_{\sigma \in S_2} x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} = \underbrace{x_1 y_2}_{\text{Id}} - \underbrace{x_2 y_1}_{(1\,2)}$

Exemple : $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta - (-\sin^2\theta) = 1$

Théorème 10 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 de base B
Si $x(x_1, x_2, x_3)$, $y(y_1, y_2, y_3)$ et $z = (z_1, z_2, z_3)$ dans la base B alors :
$$\begin{aligned} \det{}_B(x, y, z) &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2 \end{aligned}$$

Démonstration :

- Permutations σ de S_3 : $\{\text{Id}\,,\ (1\,2\,3)\,,\ (1\,3\,2)\,,\ (1\,2)\,,\ (1\,3)\,,\ (2\,3)\}$

  Les trois premières sont de signature 1 et les trois dernières de signature -1.
- $$\begin{aligned} \det{}_B(x, y, z) &= \sum_{\sigma \in S_2} x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} z_{\sigma(3)} \\ &= \underbrace{x_1 y_2 z_3}_{\text{Id}} + \underbrace{x_2 y_3 z_1}_{(1\,2\,3)} + \underbrace{x_3 y_1 z_2}_{(1\,3\,2)} - \underbrace{x_3 y_2 z_1}_{(1\,3)} - \underbrace{x_2 y_1 z_3}_{(1\,2)} - \underbrace{x_1 y_3 z_2}_{(2\,3)} \end{aligned}$$

Propriété 1 : Règle de Sarrus.

Pour appliquer facilement la formule du déterminant pour $n = 3$:

- On recopie les deux premières colonnes à droite.
- On additionne les trois produits de trois termes selon les diagonales descendantes.
- On soustrait les trois produits de trois termes selon les diagonales ascendantes.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Exemple : Calculer $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} D &= (2)(-1)(1) + (1)(3)(3) + (4)(1)(2) - (4)(-1)(3) - (2)(3)(2) - (1)(1)(1) \\ &= -2 + 9 + 8 + 12 - 12 - 1 = 14 \end{aligned}$$

Remarque : Une variante un peu plus rapide évite de recopier les deux colonnes :

On additionne les produits bleu, rouge, vert du 1^er^ groupe et l'on soustrait les produits bleu, rouge, vert du 2^e^ groupe.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

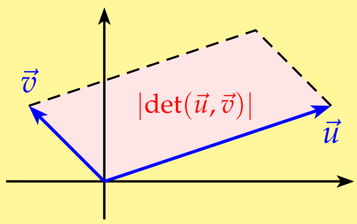
$$D = (2)(-1)(1) + (1)(2)(4) + (3)(1)(3) - (4)(-1)(3) - (3)(2)(2) - (1)(1)(1) = 14$$

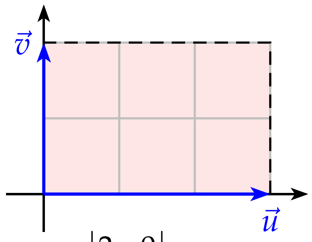
3.4 Interprétation d'un déterminant réel de dimension 2 et 3

Propriété 2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et B_2 la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

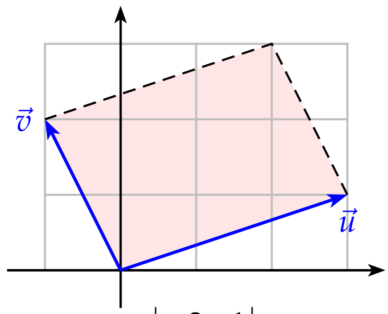
$|\det{}_{B_2}(\vec{u}, \vec{v})| =$

Aire du parallélogramme porté par $\vec{u}$ et $\vec{v}$





$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

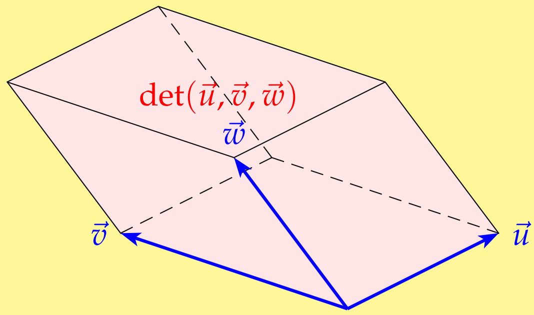


$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Propriété 3 : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et B_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$|\det{}_{B_3}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| =$

Volume du parallélépipède porté par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$



3.5 Orientation d'un R-espace vectoriel

Définition 8 : Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Soit la relation binaire $\mathscr{R}$ « avoir la même orientation » dans l'ensemble des bases de E : pour toutes bases B et B' de E

$$B \,\mathscr{R}\, B' \quad \Leftrightarrow \quad \det{}_B(B') > 0$$

La relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. Il existe deux orientations possibles (classes d'équivalence) : directe ou indirecte.

Une base est **directe** si elle a la même orientation que la base canonique de E et **indirecte** sinon.

Démonstration : Montrons que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence :

- Réflexivité : $B \,\mathscr{R}\, B$ car $\det_B(B) = 1 > 0$
- Symétrie :

  $B \,\mathscr{R}\, B'$ alors $\det_B(B') > 0$ or $\det_{B'}(B) = \dfrac{1}{\det_B(B')} > 0$ donc $B' \,\mathscr{R}\, B$
- Transitivité :

  $\begin{cases} B \,\mathscr{R}\, B' \\ B' \,\mathscr{R}\, B'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \det{}_B(B') > 0 \\ \det{}_{B'}(B'') > 0 \end{cases}$ or $\det_{B'}(B'') = \det_{B'}(B)\det_B(B'') > 0$

  donc $\det_B(B'') > 0$ alors $B \,\mathscr{R}\, B''$

4 Déterminant d'une matrice carrée

4.1 Définition

Définition 9 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle déterminant de A le déterminant de la famille des colonnes (C_j) de A dans la base canonique B_n de $\mathbb{K}^n$. On note alors :

$$\det(A) = \det{}_{B_n}(C_1, \dots, C_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Remarque : Le déterminant de la matrice identité est égal à 1 : $\det(I_n) = 1$

Théorème 11 : Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Multilinéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Produit : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- Inversibilité : A inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ dans ce cas $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
- Transposition : $\det({}^tA) = \det(A)$

Remarque : L'invariance du déterminant par transposition signifie que le déterminant d'une matrice A est multilinéaire par rapport aux ligne de A

⚠ det n'est pas une forme linéaire de $\mathscr{M}_n$ dans $\mathbb{K}$.

En général $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det(A) + \mu \det(B)$

Exemple : Multilinéarité des colonnes et des lignes :

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 2\lambda & -1 & 3 \\ -\lambda & 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2\lambda & -\lambda & 3\lambda \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

4.2 Calcul de déterminants par la méthode du pivot de Gauss

Théorème 12 : Soient $i, i \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ laisse le déterminant invariant.
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplie le déterminant par λ
- $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplie le déterminant par (-1)

Démonstration : Uniquement avec les colonnes (invariance par transposition).

- Transvection : linéarité par rapport à la j-ème colonne :

$$\begin{aligned}\det{}_{B_n}(\dots, C_j + \lambda C_i, \dots) &= \det{}_{B_n}(\dots, C_j, \dots) + \lambda \det{}_{B_n}(\overbrace{\dots, C_i, \dots}^{2 \text{ fois } C_i}) \\ &= \det(A) + 0 = \det(A)\end{aligned}$$

- Dilatation : linéarité par rapport à la j-ème colonne :

$$\det{}_{B_n}(\dots, \lambda C_j, \dots) = \lambda \det{}_{B_n}(\dots, C_j, \dots) = \lambda \det(A)$$

- Transposition $(i\ j)$: caractère alterné

$$\det{}_{B_n}(\dots, C_j, \dots, C_i, \dots) = -\det{}_{B_n}(\dots, C_i, \dots, C_j, \dots) = -\det(A)$$

Exemple : Avec $n = 4$. On cherche à avoir "1" et des "0" sur la 1re colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -16 & 2 & 5 \\ 0 & -9 & 4 & 3 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} -16 & 2 & 5 \\ -9 & 4 & 3 \\ -10 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \times \begin{vmatrix} 1 & -10 & 3 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -16 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -10 & 3 \\ 0 & 31 & -9 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 31 & -9 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -31 + 36 = 5$$

4.3 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Définition 10 : Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- On appelle mineur de a_{ij}, le déterminant $\Delta_{ij}(A)$ de la matrice extraite de A par suppression la i-ème ligne et la j-ème colonne.
- On appelle cofacteur de a_{ij} , le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)$.

Remarque : Le signe du cofacteur vient de la forme alternée du déterminant qui multiplie par (-1) chaque décalage de ligne et de colonne.

Les signes sont alors distribués ainsi : $\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$

Exemple : $\Delta_{21} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$

Théorème 13 : Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- Développement par rapport à une ligne : $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A)$
- Développement par rapport à une colonne : $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A)$

Remarque : Cette méthode de calcul révèle tout son intérêt lorsque l'on développe par rapport à une ligne ou une colonne qui comporte beaucoup de zéros. Dans le cas contraire la méthode du pivot est parfois plus avantageuse surtout si l'on s'intéresse à la nullité ou non d'un déterminant.

Exemples :

- Développement par rapport à la 1re colonne et à la 2e ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

- $$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \left(2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) - 4 \left(-3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 4\,(2(5) - 3(3)) - 4\,(-3(7)) = 40 - 36 + 84 = 88$$

4.4 Déterminant de Vandermonde

Théorème 14 : Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ complexes et $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

Démonstration : Par récurrence :

Posons $V_n = (x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant de Vandermonde

Initialisation : $V_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. On suppose que $V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$,

On a alors : $\displaystyle \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i) \overset{\text{HR}}{=} V_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i)$

Montrons que $\displaystyle V_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = V_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i)$

$x_1, \dots, x_n$ fixés et distincts, considérons la fonction $P : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x) \end{cases}$

- On développant par rapport à la $(n+1)$-ème ligne du déterminant :

  $\displaystyle P(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x^j$ où λ_j sont des cofacteurs

  Le coefficient dominant $\lambda_n = (-1)^{2n} V_n(x_1, \dots, x_n) = V_n(x_1, \dots, x_n)$
- $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(x_i) = 0$ car deux lignes identiques.

  P admet n racines distinctes : $x_1, \dots, x_n$ on peut donc factoriser :

  $\displaystyle P(x) = \lambda_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) = V_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$
- $\displaystyle P(x_{n+1}) = V_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = V_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i)$
- Cette égalité reste vraie si $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas distincts car alors les déterminants sont nuls.

La proposition est héréditaire.

Remarque : $V_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff \exists i, j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j,\ x_i = x_j$

4.5 Comatrice

Définition 11 : Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.
On appelle comatrice de A, notée $\text{com}(A)$, la matrice des cofacteur de A :

$$\text{com}(A) = \left((-1)^{i+j} \Delta_{ij}(A) \right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$$

Théorème 15 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\text{com}(A) A = A\, {}^t\text{com}(A) = \det(A) I_n$

En particulier si A est inversible $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\, {}^t\text{com}(A)$

Remarque : Cette formule est importante au niveau théorique mais inutilisable en pratique pour inverser une matrice.

Exemple : $n = 2$, pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ on a $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

donc ${}^t\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ on retrouve $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Démonstration : Montrons que : $A\,{}^t\mathrm{com}(A) = \det(A) I_n$

Cela revient à montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}\Delta_{jk}(A) = \det(A)\delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker

- Si $i = j$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}\Delta_{jk}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}\Delta_{ik}(A) = \det(A)$.

  car développement de $\det(A)$ par rapport à la i-ème ligne.
- Si $i \neq j$: On forme la matrice B en remplaçant dans A la j-ème ligne par la i-ème. On a alors $\det(B) = 0$ car B possède deux lignes identiques.

  On développe $\det(B)$ par rapport à la j-ème ligne. Les mineurs $\Delta_{ik}(B)$ et $\Delta_{ik}(A)$ associés à cette ligne sont alors égaux donc :
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}\Delta_{jk}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}\Delta_{jk}(B) = \det(B) = 0$$

4.6 Déterminant d'une matrice diagonale et triangulaire

Théorème 16 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale ou triangulaire. alors le déterminant de A est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = 1 \times 2 \times 3 = 6$

Démonstration : La démonstration se fait par récurrence sur une matrice triangulaire supérieure. Par l'invariabilité du déterminant par transposition, cela reste vrai pour une matrice triangulaire inférieure.

Initialisation : $n = 1$, $\det\left((a)\right) = a$ la proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que toute matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a pour déterminant le produit de ses coefficient diagonaux.

Soit $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure. Si on développe A_{n+1} par rapport à sa 1re colonne on a :

$$\det(A_{n+1}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n+1)} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2(n+1)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{(n+1)(n+1)} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2(n+1)} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{(n+1)(n+1)} \end{vmatrix}$$
$$\overset{\mathrm{HR}}{=} a_{11} \times a_{22} \dots a_{(n+1)(n+1)}$$

La proposition est héréditaire.

Remarque : Le théorème reste vrai si A est triangulaire par blocs.

5 Déterminant d'un endomorphisme

5.1 Théorème

Théorème 17 : Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dim. n et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Le scalaire $\det_B(f(B)) = \det(\text{Mat}_B(f))$ ne dépend pas de la base B choisie.
On l'appelle déterminant de f que l'on note $\det(f)$

Remarque : Qu'importe la base pour le déterminant d'un endomorphisme.

5.2 Propriétés

Théorème 18 : Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dim. n et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

- Déterminant d'une famille de vecteurs (x_i) par f :
$$\det{}_B\left(f(x_1, \dots, x_n)\right) = \det(f) \det{}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$$
- Déterminant d'une composée :
$$\det(g \circ f) = \det(g)\det(f) \quad \text{et} \quad \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$$
- Automorphisme : f automorphisme de $E \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

5.3 Orientation d'un R-espace vectoriel par un automorphisme

Théorème 19 : Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dim. n et $f \in \text{GL}(E)$.

- Si $\det(f) > 0$, alors l'image de toute base directe (resp. indirecte) de E est une base directe (resp. indirecte) de E. On dit que f préserve l'orientation.
- Si $\det(f) < 0$, alors l'image de toute base directe (resp. indirecte) de E est une base indirecte (resp. directe) de E. On dit que f renverse l'orientation

Remarque : On peut citer les automorphismes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ comme les rotations et les homothéties vectorielles qui conservent l'orientation et les réflexions vectorielles qui renversent l'orientation.