Chapitre 01 Les outils de la mécanique classique (cinématique et dynamique newtoniennes)

J'APPRENDS

1. Cinématique newtonienne
1.1. Référentiel et repère

La description d'un mouvement se fait par rapport à un objet, choisi comme référence, appelé référentiel.

A un référentiel on associe :
Un repère d'espace qui permet de déterminer la position du mobile. Il est déterminé par une origine et par une base, le plus souvent orthonormée. Par exemple :
$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Un repère de temps qui permet d'associer une date à chaque position du mobile. Une horloge mesure le temps par rapport à une date fixée arbitrairement comme origine.

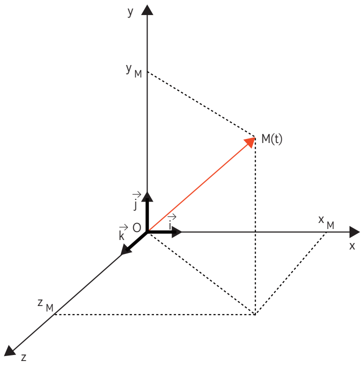
Comme exemple de référentiels, on peut citer :

• Le référentiel terrestre. Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme un repère terrestre et il est bien adapté à l'étude de mouvements qui se produisent à la surface de la terre.

• Le référentiel géocentrique ou de Coriolis. Il est constitué par le centre de la terre comme origine et trois axes qui se dirigent vers trois étoiles lointaines. Il est bien adapté à l'étude des satellites, des avions ou tout autre objet qui évolue autour de la terre.

• Le référentiel héliocentrique ou de Copernic. Il a pour origine le centre du soleil et trois axes qui se dirigent vers trois étoiles très lointaines. Il est adapté à l'étude des planètes et des étoiles.

1.2. Vecteur position



Soit M le point mobile ou le système étudié considéré comme un point matériel et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère choisi. La position de M à chaque instant t est donnée par les coordonnées cartésiennes (ou les composantes) x, y, z, d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ qu'on appelle vecteur de position.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Les coordonnées x, y, z sont des fonctions de temps et s'appellent équations horaires ou équations paramétriques du mouvement. L'équation de la trajectoire d'un mobile est une relation entre ses composantes cartésiennes. Elle s'obtient à partir des équations horaires en éliminant le temps.

1.3. Le vecteur vitesse

1.3.1. Le vecteur vitesse moyenne

Soit M_1 la position d'un mobile à l'instant t_1 et M_2 la position du mobile à l'instant t_2.

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$$

1.3.2. Le vecteur vitesse instantanée

Il s'agit de la limite de la vitesse moyenne lorsque t_2 tend vers t_1.
Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ peut s'écrire comme :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$$

Le vecteur vitesse (instantanée) $\vec{v}(t)$ d'un point M est la dérivée du vecteur de position $\overrightarrow{OM}(t)$ par rapport au temps :

Ses coordonnées sont :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t)=\dfrac{dx}{dt}(t) \\ v_y(t)=\dfrac{dy}{dt}(t) \\ v_z(t)=\dfrac{dz}{dt}(t) \end{cases}$$

Il s'écrit aussi :

$$\vec{v}(t)=\frac{dx}{dt}(t)\vec{i}+\frac{dy}{dt}(t)\vec{j}+\frac{dz}{dt}(t)\vec{k}$$

La valeur de la vitesse est $v(t)=\sqrt{(v_x(t))^2+(v_y(t))^2+(v_z(t))^2}$

Les termes : intensité, module, norme, valeur d'un vecteur sont équivalents.

Les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{v}$ (t) sont :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} \text{direction : tangente à la trajectoire} \\ \text{sens : celui du mouvement} \\ \text{valeur du vecteur : valeur de la vitesse instantanée à la date t, exprimée en m.s}^{-1} \end{cases}$$

1.4. Le vecteur accélération

1.4.1. Le vecteur accélération moyenne

Soit v_1 la vitesse d'un mobile à l'instant t_1 et v_2 la vitesse du mobile à l'instant t_2.

$$\overrightarrow{a_m}=\frac{\overrightarrow{v_2-v_1}}{t_2-t_1}$$

Son unité est le (m.s^{-2}).

1.4.2. Le vecteur accélération instantanée

Il s'agit de la limite de l'accélération moyenne lorsque t_2 tend vers t_1.

$$\vec{a}=\lim_{t_2\to t_1}\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Le vecteur accélération (instantanée) $\vec{a}$ (t) d'un point M est la dérivée du vecteur vitesse et la dérivée seconde du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ par rapport au temps :

$$\vec{a}(t)=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Ses coordonnées sont :

$$\vec{a}(t)\begin{cases}\vec{a}_x(t)=\dfrac{d\vec{v}_x}{dt}(t)\\ \vec{a}_y(t)=\dfrac{d\vec{v}_y}{dt}(t)\\ \vec{a}_z(t)=\dfrac{d\vec{v}_z}{dt}(t)\end{cases} \quad \text{ou} \quad \vec{a}(t)\begin{cases}a_x(t)=\dfrac{d^2{}_x}{dt^2}(t)\\ a_y(t)=\dfrac{d^2{}_y}{dt^2}(t)\\ a_z(t)=\dfrac{d^2{}_z}{dt^2}(t)\end{cases}$$

Il s'écrit aussi : $\vec{a}(t)=\frac{dv_x}{dt}(t)\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}(t)\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}(t)\vec{k}$ ou

$$\vec{a}(t)=\frac{d^2x}{dt^2}(t)\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}(t)\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}(t)\vec{k}$$

La valeur de l'accélération est $a(t)=\sqrt{(v_x(t))^2+(v_y(t))^2+(v_z(t))^2}$ ou

$$a(t)=\sqrt{(a_x(t))^2+(a_y(t))^2+(a_z(t))^2}$$

2. Quelques mouvements classiques

2.1. Mouvements rectilignes d'un point matériel

2.1.1. Mouvement rectiligne et uniforme

Le mouvement est rectiligne, donc la trajectoire du point matériel est une droite. Le mouvement étant uniforme, la valeur de la vitesse est constante et son vecteur accélération $\vec{a}$ est le vecteur nul.

2.1.2. Mouvement rectiligne et uniformément varié

Le mouvement étant toujours rectiligne la trajectoire du point matériel est une droite mais cette fois-ci la valeur de sa vitesse est une fonction linéaire du temps et son vecteur accélération est constant et a la même direction que la trajectoire

• $\vec{a}$ est dans le sens du mouvement s'il est accéléré, autrement dit le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{a}$, est positif

• $\vec{a}$ est dans le sens opposé au mouvement s'il est ralenti, autrement dit le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{a}$, est négatif.

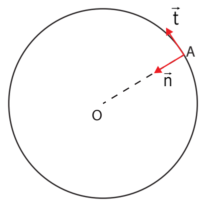
2.2. Mouvements circulaires d'un point matériel et repère de Frenet

2.2.1. Définitions

Un système est soumis à un mouvement circulaire dans un référentiel donné si sa trajectoire est un arc de cercle.
Le mouvement peut être circulaire uniforme si la norme v de sa vitesse est constante, ou circulaire non uniforme si la norme v varie.
Quoi qu'il en soit, il y a toujours une accélération $\vec{a}$ car le vecteur vitesse $\vec{v}$ varie étant donné que même dans le cas où la norme v est constante, la direction du vecteur $\vec{v}$ varie, donc le vecteur $\vec{v}$ n'est pas constant.

2.2.2. Le repère de Frenet

Le repère de Frenet est défini par (A, $\vec{t}$, $\vec{n}$)
A est l'origine du repère qui est confondu avec le système (considéré comme un point matériel)
$\vec{t}$ vecteur unitaire tangentiel
$\vec{n}$ vecteur unitaire normal, centripète (dirigé vers le centre de la trajectoire)
(figure 5)

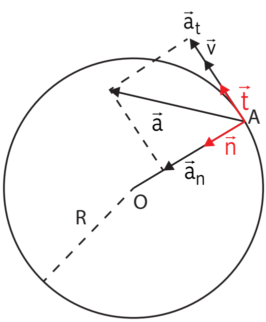


Repère de Frenet
défini par (A, $\vec{t}$, $\vec{n}$)

2.2.3. Vitesse et accélération d'un système en mouvement circulaire

Le vecteur $\vec{v}$ étant tangent à la trajectoire, on a : $\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_t = v \\ v_n = 0 \end{array}\right.$

Le vecteur $\vec{a}$ a pour coordonnées : $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} \end{array}\right.$



vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans le repère de Frenet

La composante $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ correspond à la variation du module du vecteur $\vec{v}$. Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme v = cte donc $\dfrac{dv}{dt} = 0$.

La composante $a_n = \frac{v^2}{R}$ correspond à la variation de la direction du vecteur vitesse $\vec{v}$. Donc même dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme $a_n \neq 0$

La trajectoire du point matériel est un cercle et la valeur de la vitesse reste constante mais pas le vecteur vitesse.

• Son vecteur vitesse $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire et par conséquent il change de direction donc le vecteur vitesse n'est pas un vecteur constant.

Dans le repère de Frenet, il s'écrit $\vec{v} = v\vec{t}$

Le vecteur vitesse n'étant pas constant, il existe un vecteur accélération.
• Son vecteur accélération $\vec{a}$ est porté par le rayon de la trajectoire (c'est un vecteur radial) et est orienté vers le centre du cercle de rayon R (c'est un vecteur centripète). Sa valeur est constante.

Dans le repère de Frenet, il s'écrit $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$

2.2.4. Mouvement circulaire non uniforme

La trajectoire du point matériel est un cercle et la valeur de sa vitesse varie.
• Son vecteur $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire.

Dans le cas du mouvement circulaire non uniforme le vecteur vitesse varie et en valeur et en direction. Il existe alors toujours l'accélération radiale et centripète qui traduit la modification de la direction du vecteur vitesse et en plus une accélération tangentielle qui traduit la modification de la valeur de la vitesse.

• La résultante de ces deux vecteurs est le vecteur accélération qui se dirige vers l'intérieur de la trajectoire et son expression dans le repère de Frenet est :

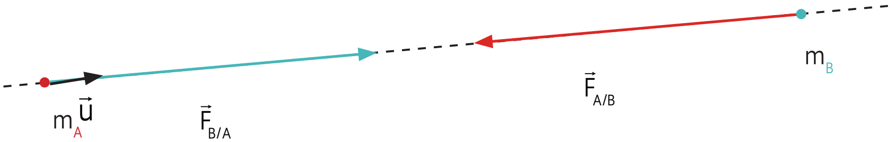
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

3. Les principales forces qu'il faut connaître

3.1. La force gravitationnelle

Elle s'exerce entre deux masses m_A et m_B qui se trouvent à une distance d. Elle est donnée par :

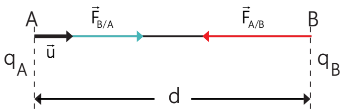
$$\vec{F}_{A/B} = -G\frac{m_A m_B}{d^2}\vec{u} = -\vec{F}_{B/A}$$



où G = $6{,}67.10^{-11}\,m^3.\,kg^{-1}.\,s^{-2}$ est la constante gravitationnelle universelle, m_A et m_B sont les masses respectives des corps A et B en interaction, en kilogrammes, d est la distance entre les centres des corps en interaction, en mètres, et $\vec{u}$ un vecteur unitaire orienté de A vers B.
Le poids d'un corps est la force gravitationnelle que la terre exerce sur ce corps :
$\vec{P}=m\vec{g}$
où le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ caractérise l'attraction de la Terre en chaque point à la proximité de sa surface. Le poids d'un objet est vertical, orienté vers le bas et de valeur $P = mg$.

3.2. La force électrique ou électrostatique

Elle s'exerce entre deux charges q_A et q_B qui se trouvent à une distance d. Elle est donnée par :



q_A et q_B sont des charges de signe opposé ($q_A \times q_B < 0$). Les forces sont attractives.

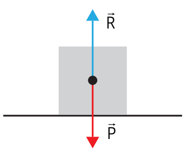
$$\vec{F}_{B/A}=G\frac{q_Aq_B}{d^2}\vec{u} \qquad \vec{F}_{A/B}=-\vec{F}_{B/A}=-G\frac{q_Aq_B}{d^2}\vec{u}$$

q_A et q_B sont des charges de même signe ($q_A \times q_B > 0$). Les forces sont repulsives.

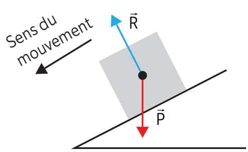
$$\vec{F}_{B/A}=-G\frac{q_Aq_B}{d^2}\vec{u} \qquad \vec{F}_{B/A}=-\vec{F}_{A/B}=-G\frac{q_A\times q_B}{d^2}\vec{u}$$

Où K est une constante valant $K = 9{,}0.10^9\,N.m^2.C^{-2}$, d est la distance entre les centres des objets chargés, en mètres, et $\vec{u}$ un vecteur unitaire orienté de A vers B.

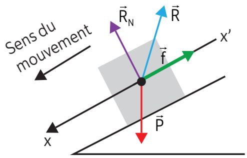
3.3. La réaction



Solide au repos



Solide en mouvement
sans frottements



Solide en mouvement
avec frottements.
La force de frottements $\vec{f}$
est la composante de $\vec{R}$
sur l'axe des x x'

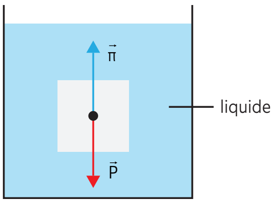
C'est la force de contact exercée par un solide sur un système. Elles est symbolisée par $\vec{R}$.

Elle est décomposée comme la somme de :

• la réaction normale $\vec{R}_n$ traduisant le fait que les solides ne s'interpénètrent pas

• la réaction tangentielle $\vec{R}_t$, encore appelée force de frottement solide, traduisant la résistance du support au mouvement du système.

3.4. Forces exercées par les fluides



Les forces de contact exercées par un fluide (liquide ou gaz) sur un système sont de deux types :

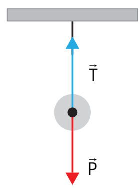
• La poussée d'Archimède (notée $\vec{\Pi}$) est verticale et orientée vers le haut.

Sa valeur est égale à $\Pi = \rho Vg$, où ρ est la masse volumique du fluide, V le volume qu'occupe l'objet qui y est plongé et g l'intensité de la pesanteur.

• La force de frottement fluide (notée $\vec{f}$) traduit la résistance du fluide au mouvement du système. (pas représentée ici)
Cette force est opposée au sens du mouvement du système dans le fluide, nulle si le

système est immobile dans le référentiel du fluide.

3.5. La tension d'un fil inextensible



Elle est symbolisée par $\vec{T}$.

Sa direction est celle du fil. Elle est orientée de l'extrémité en contact avec le système vers l'extrémité opposée du fil.

4. Les lois de Newton
4.1. Première loi de Newton : principe d'inertie

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la première loi de Newton est vérifiée.

Le référentiel terrestre, le référentiel géocentrique et héliocentrique sont considérés comme des référentiels galiléens.

Énoncé de la première loi de Newton (principe d'inertie)

Dans un référentiel galiléen, si un système assimilé à un point matériel n'est soumis à aucune force (système isolé) ou s'il est soumis à des forces dont la somme est égale au vecteur nul (système pseudo-isolé), alors il est soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme.

Soit un système de vitesse $\vec{v}$ soumis à des forces extérieures de somme $\sum \vec{F}_{ext}$. La première loi de Newton peut s'énoncer ainsi :

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}$ est un vecteur constant dans un référentiel galiléen.

Tout référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

Un référentiel n'est donc pas galiléen s'il tourne, accélère ou freine par rapport à un référentiel galiléen.

4.2. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement $\vec{p}(t)$ d'un objet de masse m et dont le centre d'inertie a la vitesse $\vec{v}(t)$ est définie par :

$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$
avec : m en kg, v(t) en $m.s^{-1}$, p(t) en $kg.m.s^{-1}$

$\vec{p}$ et $\vec{v}$ ont même direction et même sens car la masse m est une grandeur positive.

Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système isolé est constante.

4.3. Deuxième loi de Newton : relation fondamentale de la dynamique

Énoncé de la deuxième loi de Newton

La somme vectorielle des forces extérieures $\sum \vec{F}_{ext}$ qui s'exercent sur un système de masse m est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement $\vec{p}(t)$, dans un référentiel galiléen :

$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}(t)$ dans un référentiel galiléen.

Si la masse du système est constante, alors cette loi s'écrit :

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ dans un référentiel galiléen.

En effet, si la masse est constante :

$$\frac{d\vec{p}}{dt}(t) = \frac{d(m\vec{v}(t))}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = m\vec{a}(t)$$

La résultante des forces exercées sur un système de masse constante (notée $\vec{F}$) est donc colinéaire au vecteur accélération $\vec{a}$ de son centre d'inertie G, et de même sens que lui.

4.4. Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

Énoncé de la troisième loi de Newton ou principe de l'action et de la réaction

Si un système A exerce sur un système B une force $\vec{F}_{A/B}$, alors le système B exerce sur le système A une force $\vec{F}_{B/A}$ telle que :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$