Suites numériques

Table des matières

1 Suite numérique

1.1 Définition

Définition 1 : Une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une succession de nombres réels ordonnés. À un rang donné n, on associe un nombre réel u_n.

$$(u_n) \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).

Exemples :

- Soit la suite (u_n) : $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \ldots$

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	4	7	10	13	16

- Soit la suite (v_n) : $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ \ldots$

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
3	6	12	24	48	96

- Soit la suite (w_n) : $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots$

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
1	1	2	3	5	8

1.2 Définir une suite

1.2.1 De façon explicite

Définition 2 : Une suite (u_n) est définie de façon explicite si le terme général u_n s'exprime en fonction de n : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = f(n)$

Exemples :

- Soit la suite (u_n) telle que : $u_n = 3n + 5$. On a : $u_{10} = 3 \times 10 + 5 = 35$
- Soit la suite (v_n) telle que : $v_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$. On : $v_5 = \dfrac{2 \times 5 - 1}{5+1} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$

1.2.2 Par récurrence

Définition 3 : Lorsque le terme général u_n dépend du ou des terme(s) précédent(s), on définit alors la suite par une **relation de récurrence** et par un ou plusieurs premier(s) terme(s).
La suite est dite récurrente à un terme si u_n ne dépend que du terme précédent.

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

La suite est dite récurrente à deux termes si u_n dépend des deux termes qui le précèdent.

$$u_0\ ,\ u_1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$$

Exemples :

- On donne la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

  Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4, puis proposer un algorithme pour calculer ces quatre termes

  $u_1 = 3u_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = 4$
  $u_2 = 3u_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$
  $u_3 = 3u_2 - 2 = 3 \times 10 - 2 = 28$
  $u_4 = 3u_3 - 2 = 3 \times 28 - 2 = 82$

```
Variables : I entier et U réel
Entrées et initialisation
  | 2 → U
Traitement et sorties
  pour I variant de 1 à 4 faire
    | 3U − 2 → U
    | Afficher U
  fin
```

- On donne la suite (v_n) définie par : $v_0 = 2$, $v_1 = 1$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

  Déterminer v_2, v_3, v_4, v_5, puis proposer un algorithme pour calculer ces quatre termes.

  $v_2 = v_1 + v_0 = 1 + 2 = 3$
  $v_3 = v_2 + v_1 = 3 + 1 = 4$
  $v_4 = v_3 + v_2 = 4 + 3 = 7$
  $v_5 = v_4 + v_3 = 7 + 4 = 11$

```
Variables : I entier et U, V, W
            réels
Entrées et initialisation
  | 2 → U
  | 1 → V
Traitement et sorties
  pour I variant de 2 à 5 faire
    | V + U → W
    | V → U
    | W → V
    | Afficher V
  fin
```

1.3 Variation d'une suite

Définition 4 : Soit une suite(u_n) définie sur $\mathbb{N}$:

- (u_n) est strictement croissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$
- (u_n) est strictement décroissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$
- Si (u_n) est soit croissante, soit décroissante, (u_n) est dite monotone.

- Pour déterminer la variation d'une suite, on déterminera le signe de $u_{n+1} - u_n$.

  Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est croissante.
  Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est décroissante.

- Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on peut aussi calculer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

  Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la suite (u_n) est croissante.
  Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la suite (u_n) est décroissante.

Exemples :

1) Montrer que la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ est croissante.

   Calculons alors :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)-2}{(n+1)+1} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} \\
&= \frac{(3n+1)(n+1)-(3n-2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{3n^2+3n+n+1-3n^2-6n+2n+4}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{5}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0,$ la suite (u_n) est croissante.

2) Montrer que la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$ est décroissante.

Tous les termes de la suite sont positifs, calculons alors :

$$
\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}}{\dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}} = \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} = \frac{2^3 \times 2^{3n}}{3^2 \times 3^{2n}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}
$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, la suite (v_n) est décroissante.

2 Suite arithmétique

2.1 Définition

Définition 5 : Une suite arithmétique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$, r étant la raison de la suite

Une suite arithmétique est donc définie par 2 termes : u_0 ou u_p et r.

Exemple : Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $r = 5$. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4.

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + r = 2 + 5 = 7 \\
u_2 &= u_1 + r = 7 + 5 = 12 \\
u_3 &= u_2 + r = 12 + 5 = 17 \\
u_4 &= u_3 + r = 17 + 5 = 22
\end{aligned}
$$

2.2 Comment reconnaît-on une suite arithmétique ?

Propriété 1 : Une suite est arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r$$

Exemple : Montrer que la suite définie par : $u_n = 2n + 3$ est arithmétique.
On calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - (2n+3) = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = 2.$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

2.3 Expression du terme général en fonction de n

- La suite commence à u_0.

On peut écrire les égalités suivantes à l'aide de la relation de récurrence (ci-contre)
Lorsque l'on additionne les n égalités les termes $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}$ s'éliminent. Il ne reste plus que le premier terme u_0 et le dernier u_n.

$$\left.\begin{aligned}
\cancel{u_1} &= u_0 + r \\
\cancel{u_2} &= \cancel{u_1} + r \\
\cancel{u_3} &= \cancel{u_2} + r \\
&\vdots \\
\cancel{u_{n-1}} &= \cancel{u_{n-2}} + r \\
u_n &= \cancel{u_{n-1}} + r
\end{aligned}\right\} n \text{ termes}$$

$$\overline{\quad u_n = u_0 + n\,r \quad}$$

- La suite commence à u_p.

On écrit les relations de u_{p+1} à u_n. On obtient $n-p$ termes, d'où la relation :

$$u_n = u_p + (n-p)\,r$$

Propriété 2 : Le terme général u_n d'une suite arithmétique s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = u_0 + n\,r$
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = u_p + (n-p)\,r$

Exemples : Soit une suite (u_n) arithmétique de raison r. On donne : $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Trouver la raison r et le premier terme u_0.

1) On exprime u_{40} en fonction de u_{17}, on a alors :

$$u_{40} = u_{17} + (40-17)\,r \quad \Leftrightarrow \quad u_{40} = u_{17} + 23\,r \quad \Leftrightarrow \quad 23r = u_{40} - u_{17} \quad \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{u_{40} - u_{17}}{23} = \frac{70 - 24}{23} = 2$$

2) On peut alors trouver u_0.

$$u_{17} = u_0 + 17\,r \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = u_{17} - 17 \times r \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = 24 - 17 \times 2 = -10$$

2.4 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

2.4.1 Somme des n premiers naturels

Carl-Friedrich Gauss était un élève très doué en mathématiques qui s'ennuyait un peu au cours de calcul en première année scolaire. Un jour, lorsqu'il dérangeait trop le cours, le maître lui donna comme punition de calculer la somme des 100 premiers nombres. Gauss y réfléchit un court instant et répondit 5050. Le maître le regardait tout étonné, se mit à vérifier le calcul et resta bouche bée.
"*Mais comment as-tu fait pour trouver ce résultat aussi vite ?*" lui demanda-t-il après un moment.

En effet comment a-t-il fait pour trouver ce résultat si vite. Évidemment il y a une astuce. Elle consiste à écrire la somme dans l'ordre croissant puis dans l'ordre décroissant et d'additionner les deux lignes. La plupart des termes s'éliminent. Généralisons ce résultat en sommant les n premiers naturels.

$$\begin{array}{r}
S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \\
S_n = n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1 \\
\hline
2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)
\end{array}$$

Comme il y a n termes, on peut donc écrire :

$$2S_n = n\,(n+1) \quad \Leftrightarrow \quad S_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Exemple : Retrouvons le résultat de Gauss pour les 100 premiers naturels.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

2.4.2 Somme des $n+1$ premiers termes

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Déterminons la somme des $n+1$ premiers termes (de u_0 à u_n) de la suite.

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + n\,r) \\
&= (n+1)\,u_0 + r\,(1 + 2 + \cdots + n) \\
&= (n+1)\,u_0 + r \times \frac{n\,(n+1)}{2} \\
&= (n+1)\left(u_0 + \frac{n\,r}{2}\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{2u_0 + n\,r}{2}\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{u_0 + (u_0 + n\,r)}{2}\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)
\end{aligned}$$

2.4.3 Somme des $n-p+1$ premiers termes

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p. Nous laissons au lecteur le soin de la démonstration de la somme des $n-p+1$ premiers termes (de u_p à u_n) de la suite.

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = (n-p+1)\left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)$$

⚠ On retiendra plutôt la traduction suivante :

$$S_n = \text{Nbre de termes} \times \left(\frac{\text{Somme des termes extrêmes}}{2}\right)$$

2.4.4 Conclusion

Propriété 3 : Sur la somme des termes d'une suite arithmétique, on peut retenir les résultats suivants :

- La somme des n premiers naturels :

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

- La somme des premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) :

$$S_n = \text{Nbre de termes} \times \left(\frac{\text{Somme des termes extrêmes}}{2}\right)$$

Exemples :

1) Calculer la somme des nombres impairs inférieurs à 100.
Généraliser ce résultat avec la somme des nombres impairs inférieurs à $2n$.

$\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$

Il y a 50 nombres impairs inférieurs à 100. Le premier terme est 1 et le dernier 99, donc :

$$1+3+5+\cdots+99 = 50 \times \left(\frac{1+99}{2}\right) = 50^2 = 2500$$

Généralisons ce résultat. Il y a n nombres impairs inférieurs à $2n$. Le premier terme est 1 et le dernier $2n-1$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n \times \left[\frac{1+(2n-1)}{2}\right] = n \times \left(\frac{2n}{2}\right) = n^2$$

La somme des n premiers nombres impairs est égal à n^2.

2) (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1.
On note : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

On donne $u_n = 14$, $r = 7$ et $S_n = -1176$. Déterminer n et u_1.
Proposer un algorithme permettant de vérifier les résultats obtenus

Déterminons le premier terme u_1 en fonction de u_n.

$$u_n = u_1 + (n-1)\,r \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = u_n - (n-1)\,r = 14 - 7(n-1) = 21 - 7n$$

Sachant que $S_n = -1176$, et que S_n possède n termes (de u_1 à u_n), on a :

$$n\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right) = -1176 \;\Leftrightarrow\; n\left(\frac{21-7n+14}{2}\right) = -1176 \;\Leftrightarrow$$
$$n(35-7n) = -2352 \;\Leftrightarrow\; 35n - 7n^2 + 2352 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$-7n^2 + 35n + 2352 = 0$$

On peut diviser par 7 l'équation, on trouve alors : $-n^2 + 5n + 336 = 0$

On calcule alors le discriminant : $\Delta = 25 + 4 \times 336 = 25 + 1344 = 1369 = 37^2$

On obtient alors les deux racines suivantes :

$$n_1 = \frac{-5+37}{-2} = -16 < 0 \text{ non retenue} \qquad n_2 = \frac{-5-37}{-2} = 21$$

Conclusion : $n = 21$ et $u_1 = 21 - 7 \times 21 = -126$

Pour se vérifier, il faut programmer la somme des 21 premiers termes de la suite. Avec un compteur I, une somme initialement nulle et la relation de récurrence $S_I + u_{I+1} = S_{I+1}$ soit $S_I + u_1 + 7I = S_{I+1}$, on obtient alors la somme S_{21}

⚠ Noter que pour calculer S_1, il faut prendre $I = 0$ pour arriver à S_{21} avec $I = 20$

Variables : I entier et U, S réels
Entrées et initialisation
  $-126 \to U$
  $0 \to S$
Traitement
  pour I variant de 0 à 20 **faire**
    $S + U + 7I \to S$
  fin
Sorties : Afficher S

3 Suite géométrique

3.1 Définition

Définition 6 : Une suite géométrique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$ $\quad q$ étant la raison de la suite

Une suite géométrique est donc définie par 2 termes : son premier terme et sa raison.

Exemple : Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $q = 2$. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4.

$$\begin{aligned} u_1 &= q \times u_0 = 2 \times 3 = 6 \\ u_2 &= q \times u_1 = 2 \times 6 = 12 \\ u_3 &= q \times u_2 = 2 \times 12 = 24 \\ u_4 &= q \times u_3 = 2 \times 24 = 48 \end{aligned}$$

3.2 Comment reconnaît-on une suite géométrique ?

Propriété 4 : Une suite est géométrique lorsque le rapport entre deux termes consécutifs est constant. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Exemple : Montrer que la suite définie par : $u_n = 5^{n+3}$ est géométrique.

On calcule le rapport entre deux termes consécutifs quelconques :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1+3}}{5^{n+3}} = 5^{n+1+3-n-3} = 5$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 5$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 5^3 = 125$.

3.3 Expression du terme général en fonction de n

- La suite commence à u_0.

  Pour obtenir le terme suivant, en fonction du précédent, on multiplie par q. Pour obtenir u_n on a multiplié n fois par q à partir de u_0. On a donc :

$$u_n = q^n \, u_0$$

- La suite commence à u_p.

  De u_p à u_n, on a multiplié $n - p$ fois par q, donc : $u_n = q^{n-p} \, u_p$

Propriété 5 : Le terme général u_n d'une suite géométrique s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = q^n \, u_0$
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = q^{n-p} \, u_p$

Exemple : Soit une suite (u_n) géométrique de raison q. On donne : $u_7 = 4\,374$ et $u_5 = 486$. Trouver la raison q et le premier terme u_0 et u_{10} sachant que la raison est positive.

1) On exprime u_7 en fonction de u_5, on a alors :

$$u_7 = q^{7-5}u_5 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = \frac{u_7}{u_5} \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = \frac{4\,374}{486} = 9$$

La solution positive est : $q = 3$.

2) On peut alors trouver u_0 : $u_5 = q^5\, u_0 \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = \dfrac{u_5}{q^5} = \dfrac{486}{243} = 2$

3) Et u_{10} : $u_{10} = q^{10-7}\, u_7 = 3^3 \times 4\,374 = 27 \times 4\,374 = 118\,098$

3.4 Somme des premiers termes d'une suite géométrique

3.4.1 Somme des $n+1$ premières puissances de q

Soit donc la somme : $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$

En soustrayant les deux lignes suivantes, on obtient :

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cdots + \cancel{q^{n-1}} + \cancel{q^n} \\ q \times S_n = & \quad\;\; \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cdots + \cancel{q^{n-1}} + \cancel{q^n} + q^{n+1} \\ \hline S_n - qS_n = & 1 - q^{n+1} \end{array}$$

On obtient alors : $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exemple : La légende raconte qu'un roi de Perse voulu récompenser l'inventeur du jeu d'échecs. Après avoir réfléchi, ce dernier lui proposa "*Vous déposerez un grain de riz sur la première case, puis deux sur la deuxième, puis quatre sur la troisième, vous doublez ainsi le nombre de grains en passant d'une case à l'autre jusqu'à la 64ème et je vous prends tous les grains*". "*Ce n'est pas une grosse récompense" lui répondit le roi*". Qu'en pensez-vous ? Quelle masse de blé cela représente-t-il ?
On pourra considérer que $2^{10} \simeq 10^3$. La masse d'un grain de riz est de 40 mg environ et la production mondiale annuelle en 2014 était de 479 millions de tonnes.

Le nombre de grains de riz sur n^e case de l'échiquier correspond à une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_1 = 1$. Si on veut connaître le nombre de grains de riz sur l'échiquier, il suffit de calculer :

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63} \quad \Leftrightarrow \quad S_{64} = \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1 \simeq 2^{64}$$

Comme $2^{10} \simeq 10^3$: $2^{64} = 2^4 \times (2^{10})^6 \simeq 16 \times (10^3)^6 \simeq 16 \times 10^{18}$

Si la masse d'un grain de riz est de 40 mg, la masse de riz en mg est d'environ :

$$40 \times 16 \times 10^{18} = 640 \times 10^{18} = 6,4 \times 10^{20} \text{ mg}$$

Tonne en mg : $1 \text{ T} = 10^3 \text{ kg} = 10^6 \text{ g} = 10^9 \text{ mg}$

On obtient alors : $6,4 \times 10^{20} \text{ mg} = 6,4 \times 10^{11} \text{ T} = 640$ milliards de tonnes !

3.4.2 Somme des $n+1$ premiers termes

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Déterminons la somme des $n+1$ premiers termes (de u_0 à u_n) de la suite.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= u_0 + (qu_0) + (q^2u_0) + \cdots + (q^n u_0) \\ &= u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) \end{aligned}$$

Nous retrouvons la somme des $n+1$ premières puissances de q

$$S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

3.4.3 Somme des $n-p+1$ premiers termes

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p. Nous laissons au lecteur le soin de la démonstration de la somme des $n-p+1$ premiers termes (de u_p à u_n) de la suite.

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

⚠ On retiendra plutôt la traduction suivante :

$$S_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1-q^{\text{Nbre de termes}}}{1-q}$$

3.4.4 Conclusion

Propriété 6 : Sur la somme des termes d'une suite géométrique, on peut retenir les résultats suivants :

- La somme des $n+1$ premières puissances de q vérifie :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 vérifie :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- La somme des premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q et de premiers termes u_p vérifie :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = S_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1-q^{\text{Nbre de termes}}}{1-q}$$

3.5 Suite arithmético-géométrique

Définition 7 : Une suite arithmético-géométrique (u_n) est définie par :

- Un premier terme u_0 ou u_p
- la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$

Pour trouver le terme général, on introduit une suite auxiliaire géométrique.

Exemple : Soit une suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$

On pose la suite (v_n) telle que $v_n = u_n + 5$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique
2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

$\Rightarrow \Rightarrow$

1) Il faut donc montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = qv_n$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = 2u_n + 5 + 5 = 2(u_n + 5) = 2v_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 5 = 7$

2) Comme (v_n) est une suite géométrique, on a : $v_n = q^n v_0 = 7 \times 2^n$

Comme $v_n = u_n + 5$, on a donc : $u_n = v_n - 5 = 7 \times 2^n - 5$

4 Visualisation d'une suite

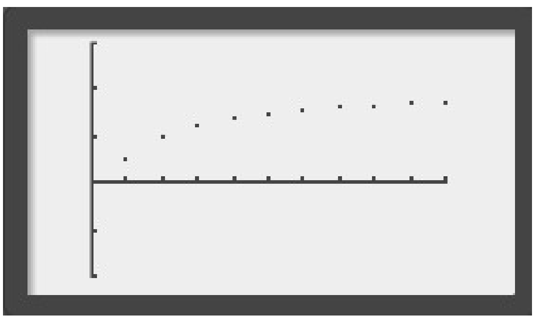
4.1 Suite explicite

Une suite explicite est définie par : $u_n = f(n)$. Il suffit de connaître la représentation de la fonction f pour représenter la suite.

Sur la calculette, pour représenter les termes de u_0 à u_{10} de : $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$

- Sélectionner (mode) 4e ligne sélectionner *suite* ou *seq* (anglais)
- On rentre la suite avec $f(x)$ ou Y.
  $nMin = 0$
  $u(n) = (2n-1)/(n+1)$ (utiliser la touche variable)
  $u(nMin) = -1$
- On règle ensuite la fenêtre :
  $nMin = 0,\quad nMax = 10$
  $Xmin = 0,\quad Xmax = 10$
  $Ymin = -2,\quad Ymax = 3$

On obtient alors la représentation ci-contre



4.2 Suite définie par récurrence

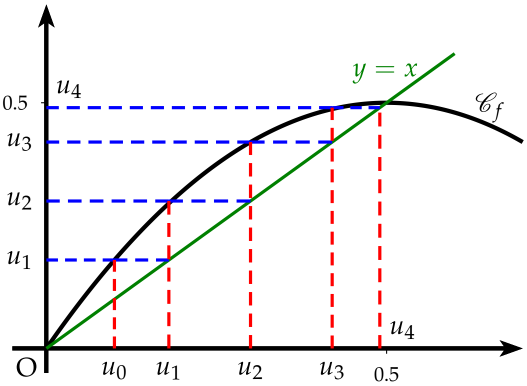
Une suite définie par récurrence est définie par un premier terme (souvent u_0) et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. En plus de la représentation de la fonction f, il faut tracer la droite d'équation $y = x$ afin de reporter les termes de la suite sur l'axe des abscisses.

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$$

On obtient alors le graphe suivant, après avoir tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x(1-x)$$



Pour visualiser, sur sa calculette, la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

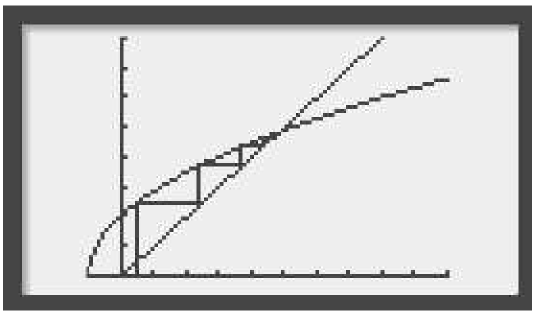
On met la calculette en mode *suite* ou *seq*. Il faut de plus changer le *format*.

Sélectionner [format] *esc* ou *web* (en anglais)

Ensuite, on rentre la suite avec la touche $f(x)$ ou Y.

⚠ la calculette demande d'exprimer u_n en fonction u_{n-1} contrairement à l'usage habituel. De plus pour avoir le "u" minuscule, utiliser la touche du $\boxed{7}$ avec la touche (2nde)

$nMin = 0$
$u(n) = \sqrt{u(n-1)+1}$
$u(nMin) = 0.5$
On règle ensuite la fenêtre :
$nMin = 0, \quad nMax = 5$
$Xmin = -1, \quad Xmax = 10$
$Ymin = 0, \quad Ymax = 8$
On obtient alors la représentation ci-contre



5 Limite d'une suite

⚠ Seule une approche de la notion de limite d'une suite à partir d'exemples est exigible en première. Cependant par souci de rigueur et préparer la terminale, on donnera les définitions de convergence et divergence d'une suite..

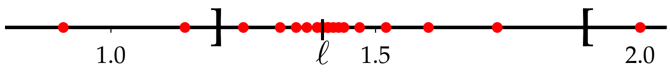
5.1 Convergence d'une suite

Définition 8 : On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et l'on dit que la suite **converge** vers ℓ

Remarque : Lorsqu'elle existe cette limite est unique.

Cette définition traduit l'accumulation des termes u_n autour de ℓ



Conséquence Les suites définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{1}{n^2}, \quad w_n = \frac{1}{n^3}, \quad t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{ont pour limite } 0$$

Algorithme : Déterminer à partir de quel entier N, u_n est dans un intervalle contenant ℓ.

Soit (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

Cette suite converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$.

On veut connaître à partir de quel entier N la suite est dans l'intervalle ouvert centré en ℓ et de rayon 10^{-3}.
Le programme suivant permet de trouver N, grâce à un "Tant que".
On obtient alors :
$N = 7$ et $U \simeq 1{,}618$

Variables : N entier, U réel
Entrées et initialisation
- $0,5 \to U$
- $0 \to N$

Traitement
- **tant que** $\left|U - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \geqslant 10^{-3}$ **faire**
  - $\sqrt{U+1} \to U$
  - $N + 1 \to N$
- **fin**

Sorties : Afficher N, U

5.2 Divergence d'une suite

Définition 9 : On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

On dit que la suite **diverge** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Remarque : Cette définition traduit l'idée que les termes de la suite arrivent à dépasser A, aussi grand soit-il. La suite n'est pas majorée.

Une suite peut n'avoir aucune limite. Par exemple : $u_n = (-1)^n$. On dit alors que la suite diverge (tout court)

Conséquence Les suites définies pour tout entier naturel par :

$$u_n = n, \quad v_n = n^2, \quad w_n = n^3, \quad t_n = \sqrt{n}, \quad \text{ont pour limite } +\infty$$

Algorithme : Déterminer à partir de quel entier N, u_n est supérieur à un nombre donné A (suite croissante).

Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$

On peut montrer que cette suite est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$. On voudrait connaître à partir de quel entier N, u_n est supérieur à 10^6
Le programme suivant, permet de trouver N, grâce à un "Tant que".
On obtient alors :

$N = 18$ et $U = 1\,835\,003$

Variables : N entier, U réel
Entrées et initialisation
  $2 \to U$
  $0 \to N$
Traitement
  tant que $U \leqslant 10^6$ **faire**
    $2U + 5 \to U$
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N, U

5.3 Convergence d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique de raison q. Comme l'expression du terme général est de la forme : $u_n = u_0\, q^n$, la convergence de la suite ne dépend que de la convergence de q^n. On admettra le théorème suivant :

Théorème 1 : Soit q un réel. On a les limites suivantes

- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas.

Exemples :

- La suite de terme $u_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge vers 0 car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$.
  Par contre la suite de terme $u_n = 2(1,5)^n$ diverge vers $+\infty$ car $1,5 > 1$.
- (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $\dfrac{3}{4}$.
  On note S_n la somme des $n+1$ premiers termes : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
  D'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on a :

$$S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{3}{4}} = 12\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{3}{4} < 1 \quad \text{donc par produit } \lim_{n \to +\infty} S_n = 12$$