

# Les suites numériques

## Généralités sur les suites

### EXERCICE 1

Pour les suites suivantes, trouver la fonction  $f$  associée à la suite définie par la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  et calculer les termes de  $u_1$  à  $u_4$

$$\text{a) } \begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n} \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

### EXERCICE 2

Pour les suites suivantes, calculer les termes de  $u_1$  à  $u_5$  puis **conjecturer une formule explicite** du terme général. Retrouver alors  $u_0$  à partir de la formule conjecturée puis démontrer la relation donnée entre  $u_{n+1}$  et  $u_n$ .

$$\text{a) } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{1}{1 + u_n} \end{cases}$$

### EXERCICE 3

Pour les exercices suivants, étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } u_n = \frac{3n-2}{n+1} & \text{c) } u_n = (n-5)^2, \quad n \geq 5 \\ \text{b) } u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}} & \text{d) } u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - n \\ & \text{e) } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2^n}{n} \end{array}$$

### EXERCICE 4

- 1) Quelle est la suite  $(u_n)$  définie par récurrence dont ce programme calcule le terme  $u_n$ .
- 2) On prend  $A = 2$ 
  - a) Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
  - b) Ecrire ce programme sur votre calculatrice puis donner une approximation du terme  $u_{10}$ .
  - c) Que semble calculer la suite  $(u_n)$  ?
- 3) Prenez plusieurs valeur de  $A$ , par exemple 3, 4, 9, 25, et indiquer le terme  $u_{10}$  qui permet de confirmer votre conjecture. Cette suite s'appelle la suite du Héron.

**Variables :**  $N, I$  entiers et  $A, U$  réels  
**Entrées et initialisation**  
 | Lire  $A, N$   
 |  $1 \rightarrow U$   
**Traitement**  
 | **pour**  $I$  variant de 1 à  $N$  **faire**  
 | |  $\frac{1}{2} \left( U + \frac{A}{U} \right) \rightarrow U$   
 | **fin**  
**Sorties :** Afficher  $U$

## Suite arithmétique

### EXERCICE 5

Pour les exercices suivant préciser si la suite  $(u_n)$  est arithmétique ou non

a)  $u_n = 2n + 3$

c)  $u_n = n^2 - n$

b)  $u_{n+1} = \frac{3n+1}{2}$

d)  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + u_n \end{cases}$

### EXERCICE 6

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

a)  $u_0 = 1$  et  $u_{10} = 31$ . Calculer  $r$  puis  $u_{2015}$

b)  $u_0 = 5$  et  $u_{100} = -45$ . Calculer  $r$  puis  $u_{20}$

c)  $u_{17} = 24$  et  $u_{40} = 70$ . Calculer  $r$  puis  $u_0$ .

### EXERCICE 7

**Avec une suite auxiliaire**

$(u_n)$  est la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$

a) Calculer  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ .

b) Pour tout  $n$  on pose  $v_n = \frac{1}{u_n}$ . Calculer  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ .

c) Prouver que la suite  $(v_n)$  est arithmétique. Exprimer alors  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### EXERCICE 8

a) Démontrer que la somme :  $1 + 3 + 5 + \dots + 99$  est le carré d'un naturel.

b) Calculer, en fonction de  $n$ , la somme des  $n$  premiers naturels impairs

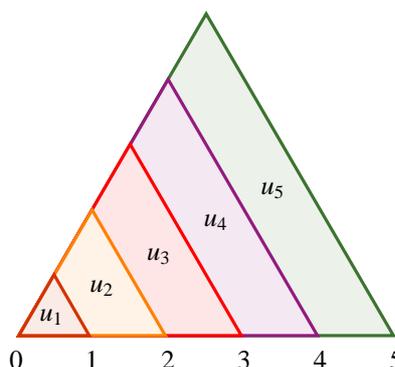
$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

### EXERCICE 9

La figure ci-dessous, indique le début de la construction de zones colorées que l'on peut prolonger indéfiniment. Tous les triangles de la figure sont équilatéraux.

a) Prouver que la suite  $(u_n)$  des aires définies par la figure est arithmétique. Quelle est sa raison ?

b) La suite  $(v_n)$  des périmètres est-elle arithmétique ?



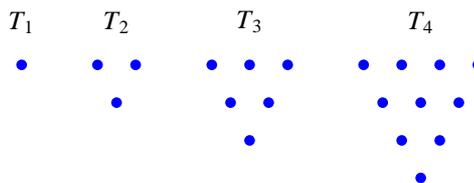
**EXERCICE 10**

- Calculer la somme de tous les entiers naturels multiples de 3 inférieurs à 1 000.
- Calculer la somme de tous les entiers naturels multiples de 5 inférieurs à 9 999.
- Calculer la somme de tous les nombres entiers naturels inférieurs à 2 154 ayant 3 comme chiffre des unités.

**EXERCICE 11****Nombres triangulaires**

Voici les quatre premiers nombres triangulaires :

- Représenter et donner les valeurs de  $T_5$  et  $T_6$ .
- Ecrire un algorithme permettant de calculer un nombre triangulaire quelconque  $T_n$ , puis à l'aide de votre calculatrice donner les valeurs de  $T_{12}$  et  $T_{60}$ .
- Retrouver ces résultats par le calcul.
- Écrire un algorithme permettant de trouver les valeurs de  $n$  telles que :  
 $T_n \geq 100$  puis  $T_n \geq 1000$ .
- Retrouver ces résultats par le calcul.

**EXERCICE 12**

$(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$ , de premier terme  $u_1$  et de  $n^{\text{e}}$  terme  $u_n$ .

On note  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

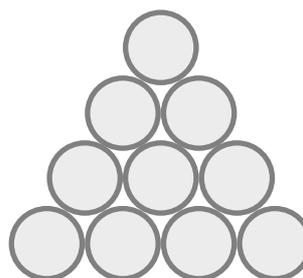
Les questions sont indépendantes les unes des autres.

- Calculer  $u_1$  et  $S_{17}$  lorsque :  $u_{17} = 105$  et  $r = 2$
- Calculer  $u_1$  et  $u_{33}$  lorsque :  $r = -7$  et  $S_{33} = 0$
- Calculer  $n$  et  $u_1$  lorsque :  $u_n = 14$  ,  $r = 7$  et  $S_n = -1176$

**EXERCICE 13**

Des tuyaux sont rangés comme indiqué ci-contre :

- Quel est le nombre total de tuyaux dans un empilage de 5 couches ? 12 couches ?
- On a stocké 153 tuyaux, combien y a-t-il de couches ?
- Pour ranger 200 tuyaux, combien faut-il de couches ? Combien reste-t-il de tuyaux ?



**EXERCICE 14****Nombres pyramidaux**

On suppose que la suite des entiers naturels est écrite dans un tableau selon la disposition ci-dessous. On représentera un nombre par le numéro de la ligne qui le contient et par son rang dans la ligne à partir de la gauche. Par exemple, 6. Le nombre 6 est au second rang de la troisième ligne. Dans quelle ligne se trouve le nombre 2 013 ? Quel est son rang dans cette ligne ?

					1					
				2	3	4				
			5	6	7	8	9			
		10	11	12	13	14	15	16		
17	18	19	20	21	22	23	24	25		

**EXERCICE 15****Forage**

Une entreprise estime le coût d'un forage ainsi :

- le premier mètre coûte 1 000 euros.
- Le second mètre coûte 1 050 euros et chaque mètre supplémentaire coûte 50 euros de plus que le précédent.
- On dispose d'un crédit de 519 750 €.

- 1) Proposer un programme permettant de connaître la profondeur du forage.
- 2) On appelle  $(u_n)$  la suite telle que  $u_1 = 1\,000$  et  $u_n$  représente de coût du  $n^{\text{e}}$  mètre.
  - a) Montrer que  $(u_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison. Exprimer alors  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - b) Montrer que le nombre de mètres  $n$  que l'on peut forer avec le crédit alloué vérifie :  $n^2 + 39n - 20\,790 = 0$
  - c) Retrouver le résultat de la question 1)

**EXERCICE 16**

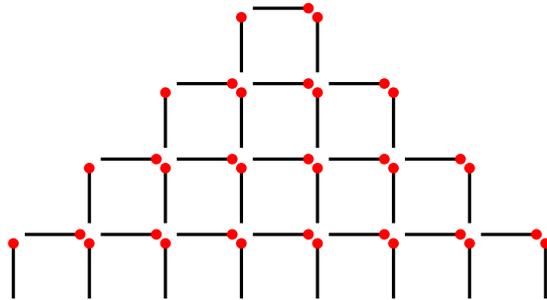
Un cycliste effectue cinq tours de piste en 2 minutes 40 secondes. Sachant qu'à chaque tour, il a mis une seconde de plus qu'au précédent, déterminer le temps mis pour chaque tour.

*On donnera une résolution à l'aide d'une suite puis une résolution arithmétique*

**EXERCICE 17****Histoire d'allumettes**

En posant des allumettes de même longueur sur une table, on réalise une figure plane donnée sur la figure ci-dessous.

Combien d'étages peut-on construire avec 10 440 allumettes ? On proposera un algorithme puis on vérifiera le résultat par le calcul.

**EXERCICE 18**

On donne l'algorithme ci-contre.

- Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de la suite utilisée dans cet algorithme.
- Préciser le but de cet algorithme puis donner le résultat obtenu.
- Retrouver ce résultat par le calcul

**Variabes :**  $I$  entier et  $U, S$  réels

**Entrées et initialisation**

$1 \rightarrow U$

$0 \rightarrow S$

**Traitement**

**pour**  $I$  variant de 1 à 10 **faire**

$U + 3 \rightarrow U$

$S + U \rightarrow S$

**fin**

**Sorties :** Afficher  $S$

**Suite géométrique****EXERCICE 19**

Pour les exercices suivants, préciser si la suite est géométrique ou non.

a)  $u_n = 5^{n+3}$

c)  $u_n = 3^n + 3n$

b)  $u_n = \frac{2n+3}{3}$

d)  $u_0 = -1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, 5u_{n+1} - 2u_n = 1$

**EXERCICE 20**

Pour les exercices suivants,  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$ .

a)  $u_0 = 4$  et  $q = 5$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

b)  $u_4 = 8$  et  $q = 2$ . Calculer  $u_2$  et  $u_6$ .

c)  $u_5 = 10$  et  $q = -\frac{1}{2}$ . Calculer  $u_0$  et  $u_{10}$ .

d)  $u_5 = 64, u_7 = 256, q > 0$ . Calculer  $q$  puis  $u_{10}$

e)  $u_5 = 486, u_7 = 4\,374, q > 0$ . Calculer  $u_0$  et  $u_{10}$ .

**EXERCICE 21**

Pour les exercices suivants,  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$ .

- a) Pour tout naturel  $n$ , on a  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$   
Tous les termes sont non nuls et sa raison  $q$  est positive. Trouver  $q$ .
- b)  $(u_n)$  est une suite géométrique croissante dont les termes sont négatifs. Son premier terme est  $u_1$ 
  - 1) Que peut-on dire de sa raison ?
  - 2) On sait que  $u_1 \times u_3 = \frac{4}{9}$  et  $u_1 + u_2 + u_3 = -\frac{19}{9}$ .  
Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
  - 3) Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 22****Avec une suite auxiliaire**

$(u_n)$  est une suite définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 5$ .

- a) Calculer  $u_1, u_2, u_3, u_4$  et  $u_5$ .
- b) Pour tout naturel  $n$ , on pose  $v_n = u_n + 5$ .  
Calculer  $v_1, v_2, v_3, v_4$  et  $v_5$ .
- c) Prouver que la suite  $(v_n)$  est géométrique. Exprimer alors  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 23****Somme de termes**

- a) Calculer :  $S = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^7$
- b) Calculer :  $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1\,048\,576}$
- c) Calculer :  $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots - \frac{1}{6\,561}$
- d) Calculer :  $S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^7}$

**EXERCICE 24**

$(u_n)$  est une suite géométrique,  $u_{10} = 25$  et  $u_{13} = 200$ .

- a) Calculer  $u_0$  et la raison  $q$ .
- b) Calculer  $S = u_{10} + u_{12} + u_{14} + \dots + u_{20}$

**EXERCICE 25****Problème de loyer**

Une personne loue un appartement à partir du 1er avril 2007. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 4 800 € et le locataire s'engage à occuper l'appartement pendant 9 années complètes.

**1) Contrat n°1**

Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5 % du loyer chaque année.

- Calculer le loyer  $u_1$  payé la deuxième année. On appelle  $u_0$  le loyer de la 1<sup>re</sup> année.
- Exprimer  $u_n$  - loyer de la  $(n + 1)^e$  année - en fonction de  $n$ . Calculer  $u_8$  (loyer de la 9<sup>e</sup> année)
- Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat.

**2) Contrat n°2**

Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 280 euros chaque année.

- Calculer le loyer  $v_1$  payé pour la deuxième année. On appelle  $v_0$  le loyer de la 1<sup>re</sup> année.
- Exprimer  $v_n$  - loyer de la  $(n + 1)^e$  année - en fonction de  $n$ . Calculer  $v_8$  (loyer de la 9<sup>e</sup> année)
- Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat. Quel est le contrat le plus avantageux ?

**EXERCICE 26**

- Vérifier que la suite  $(w_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $w_n = 2^n - 2n + 2$  n'est ni arithmétique ni géométrique.
- Prouver que la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = -2n + 2$  est arithmétique.
  - Prouver que la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $v_n = 2^n$  est géométrique.
- Calculer alors la somme :  $S = w_0 + w_1 + \dots + w_{10}$

**Limite d'une suite****EXERCICE 27**

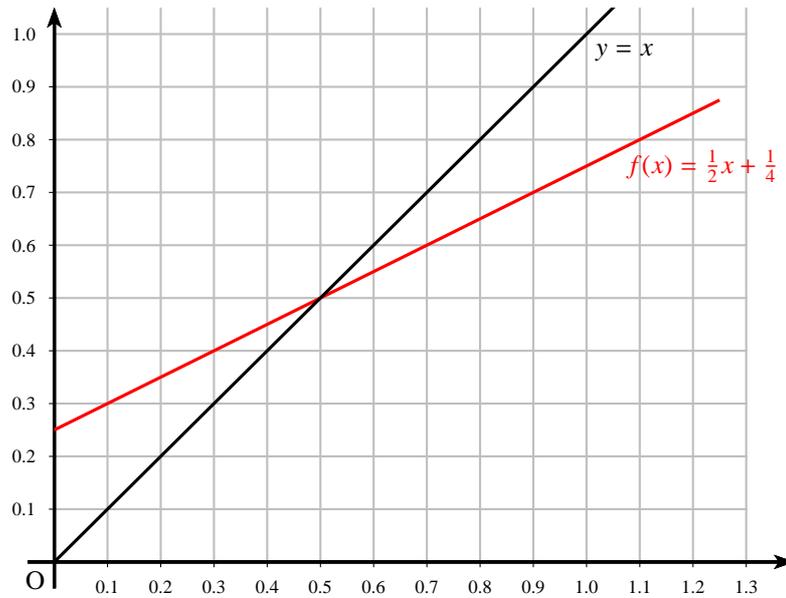
Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$

- A l'aide de votre calculatrice, conjecturer graphiquement le comportement de la suite  $(u_n)$  pour les grandes valeurs de  $n$ .  
On prendra comme fenêtre :  $X \in [0; 1]$  et  $Y \in [0; 0, 5]$
- On pose :  $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$ . Prouver que la suite  $(v_n)$  est arithmétique. Vous donnerez son premier terme et sa raison.
- Exprimer  $v_n$ , puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**EXERCICE 28**

$(u_n)$  est la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}$ .

- Placer sur l'axe des abscisses les termes  $u_0, u_1, u_2, u_3$  sur la représentation ci-dessous. Conjecturer alors limite de la suite  $(u_n)$ .

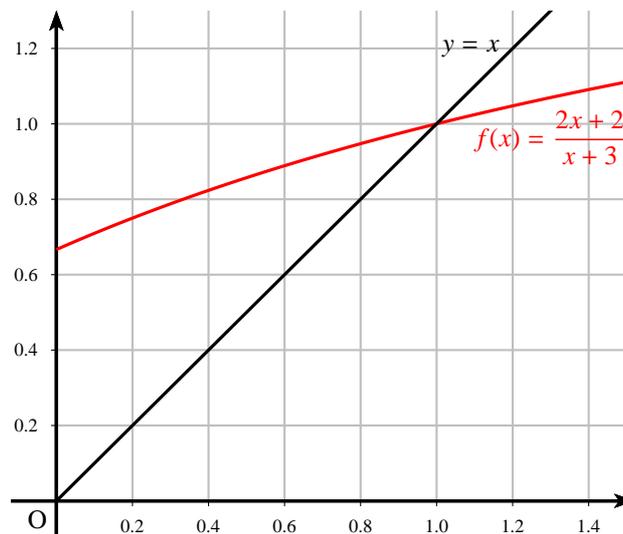


- 2) On pose  $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ .
- Prouver que la suite  $(v_n)$  est géométrique.
  - Exprimer  $v_n$ , puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

### EXERCICE 29

La suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$ .

- 1) Placer sur l'axe des abscisses les termes  $u_0, u_1, u_2, u_3$  sur la représentation ci-dessous. Conjecturer alors limite de la suite  $(u_n)$ .



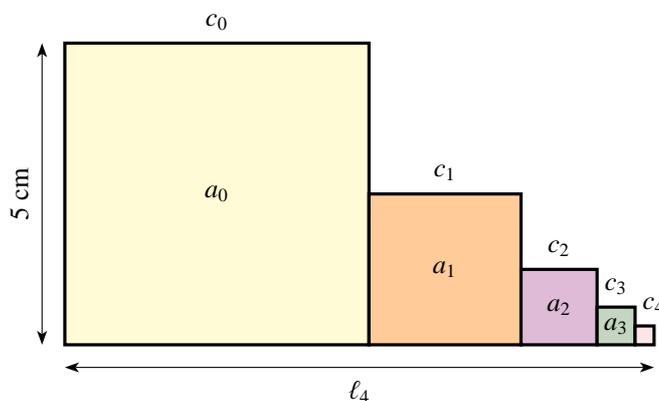
- 2) On pose  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ .
- Prouver que la suite  $(v_n)$  ainsi définie est géométrique.
  - Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - Quelle est la limite de  $(v_n)$ ? En déduire la limite de  $(u_n)$ .

**EXERCICE 30****Avec des carrés**

$n$  carrés sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous (réalisé avec 5 carrés). Le côté d'un carré vaut la moitié du précédent.

Le premier carré a pour côté  $c_0 = 5$  cm et pour aire  $a_0$ .

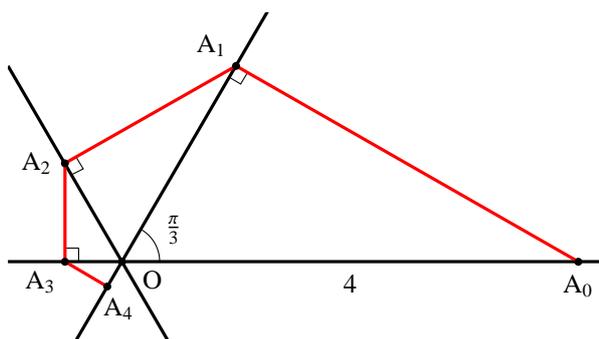
On pose  $\ell_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n$  et  $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ .



- 1) Calculer les cinq premiers termes des suites  $(\ell_n)$  et  $(s_n)$ . On pourra s'aider éventuellement d'un algorithme.
- 2) a) Exprimer  $\ell_n$  et  $s_n$  en fonction de  $n$ .  
b) Existe-t-il un entier  $p$  tel que  $\ell_p \geq 10$ ?  
c) Donner la limite (éventuelle) de chacune des suites  $(\ell_n)$  et  $(s_n)$ .

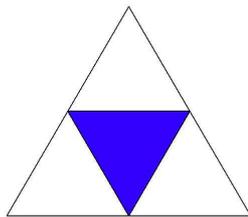
**EXERCICE 31****Construction géométrique**

Les deux droites issues de  $O$  font des angles de  $\frac{\pi}{3}$  et la mesure de  $OA_0$  est 4.

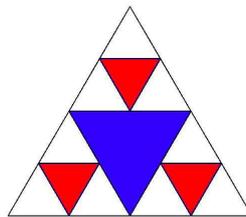


On définit la suite  $(u_n)$  par :  $u_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n$

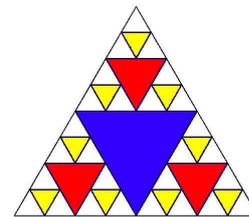
- a) On pose  $v_n = A_{n-1}A_n$ . Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique et l'on précisera la raison et le premier terme  $v_1$ .
- b) Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- c) Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$

**EXERCICE 32****Les triangles de Sierpinski**

Étape 1



Étape 2



Étape 3

On part d'un triangle équilatéral de côté 10.

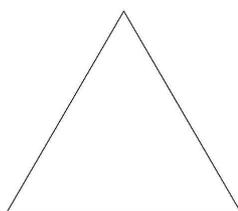
A chaque étape, on construit dans chaque triangle équilatéral (non colorié), le triangle équilatéral (colorié) ayant pour sommets les milieux des côtés.

On s'intéresse à l'aire  $S_n$  et au périmètre  $P_n$  de la surface coloriée à la  $n^{\text{ième}}$  étape.

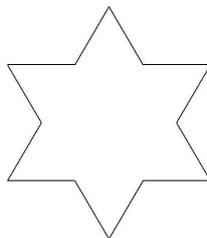
- 1) a) Expliquer pourquoi, quel que soit l'entier  $n$ ,  $S_n \leq 25\sqrt{3}$   
 b) Conjecturer le sens de variation de  $S_n$  et de  $P_n$ , et leurs limites éventuelles.
- 2) Exprimer  $S_n$  et  $P_n$  en fonction de  $n$  puis déterminer, si elles existent :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

**EXERCICE 33****Le flocon de Von Koch (1870 - 1934)**

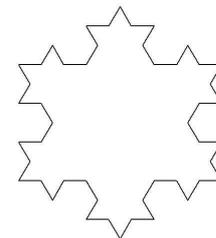
Soit un triangle équilatéral de côté  $a$  (étape 1). Sur chaque côté, on considère deux points qui partagent ce côté en trois parties de même longueur. Sur chaque côté, on obtient ainsi trois segments ; sur le segment central, on construit vers l'extérieur un triangle équilatéral en supprimant le segment central. On obtient un polygone (étape 2). On réitère la processus (étape 3) autant de fois que l'on souhaite.



Étape 1



Étape 2



Étape 3

On note  $C_n$  le polygone obtenue à la  $n^{\text{ième}}$  étape. On note  $p_n$  le périmètre de  $C_n$  et  $A_n$  l'aire de  $C_n$ .

- a) Exprimer  $p_n$  en fonction de  $n$ . La suite  $(p_n)$  admet-elle une limite ?
- b) Exprimer  $A_n$  en fonction de  $n$ . La suite  $(A_n)$  admet-elle une limite ?
- c) Quelle conclusion peut-on donner à ces polygones ainsi formés en ce qui concerne leur aire et leur périmètre.

**EXERCICE 34**

**Suite récurrentes à deux termes.**

$(u_n)$  est la suite définie par  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 2$  et  $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$ .

- 1) a) Déterminer un algorithme permettant de calculer  $u_n$ ,  $n$  étant donné.
- b) Programmer cet algorithme sur votre calculette puis remplir le tableau suivant (on donnera les valeurs à  $10^{-4}$ ) :

$n$	2	5	10	50
$u_n$				

- c) Conjecturer la limite de la suite.
- 2) a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_{n+1} - u_n$  est une suite géométrique.
- b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) a) Montrer que :  $u_n = 2(1 - 0,5^n) + 1$ .
- b) Retrouver la conjecture du 1.c)
- 4) Déterminer un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier  $p$  tel que pour  $n \geq p$  :  $|u_n - 3| < 10^{-6}$

**EXERCICE 35**

On définit la suite  $(u_n)$  de la façon suivante :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}, \quad u_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}, \quad \text{et ainsi de suite}$$

- a) Calculer les valeurs exactes de :  $u_1, u_2, u_3$ .
- b) Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$
- c) Ecrire un algorithme permettant de calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ . Remplir ensuite le tableau suivant (on donnera les valeurs à  $10^{-4}$ ) :

$n$	5	10	20	50
$u_n$				

- d) Conjecturer la limite de la suite  $(u_n)$

**EXERCICE 36**

On définit la suite  $(u_n)$  de la façon suivante :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \quad u_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \quad \text{et ainsi de suite}$$

- a) Calculer les valeurs exactes de :  $u_1, u_2, u_3$ .
- b) Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$
- c) Ecrire un algorithme permettant de calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ . Remplir ensuite le tableau suivant (on donnera les valeurs à  $10^{-4}$ ) :

$n$	5	10	20	50
$u_n$				

d) Conjecturer la limite de la suite  $(u_n)$

### EXERCICE 37

---

#### Négociation

Pierre essaie de vendre sa vieille voiture 1000 € à Paul. Paul trouve ce prix trop cher et lui propose 500 €. Pierre décide de couper la poire en deux et lui propose alors 750 €. Paul tient alors le même raisonnement et lui propose 625 €. Et ainsi de suite ... Vont-ils finir par se mettre d'accord ?

On pose  $u_0 = 1000$  la 1<sup>re</sup> proposition de Pierre et  $u_1 = 500$  la 1<sup>re</sup> proposition de Paul.

- Exprimer la proposition  $u_{n+2}$  en fonction des 2 propositions précédentes  $u_{n+1}$  et  $u_n$ .
- Programmer cette suite sur votre calculatrice. Vers quel prix Pierre et Paul vont-ils tomber d'accord ?