

# Les droites du plan

On se place dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

### Équation réduite d'une droite

Soit une droite (D), non verticale. Elle admet une **unique** équation **réduite** de la forme :

$$y = mx + p$$

- $m \in \mathbb{R}$ , désigne le **coefficient directeur** (ou pente). Il renseigne sur l'inclinaison de la droite.
- $p \in \mathbb{R}$  est appelé « **ordonnée à l'origine** »

- Si  $m = 0$ , la droite (D) est **horizontale**

### Représentation graphique

**Exemple :** Tracer dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la droite d'équation  $y = -2x + 5$  (1)

**Méthode :** On construit un tableau de valeurs :

$x$	0	1	2
$y$	5	3	1
$(x; y)$	(0;5)	(1;3)	(3;1)

On choisit 2 ou 3 valeurs de  $x$ .  
On calcule les «  $y$  »  
On obtient les points de (D)

⚠ On choisit judicieusement les valeurs de «  $x$  » de façon à avoir un tracé précis i.e. des points suffisamment éloignés.

### Calcul de $m$ et lecture graphique

- Calcul algébrique : soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points de la droite (D) tels que  $x_A \neq x_B$  on a :
 
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{et} \quad p = y_A - mx_A$$
- ⚠ Si la droite est tracée, il faut s'assurer que le signe de  $m$  est cohérent avec l'allure de la droite...
- Lecture graphique

ici  $m = -\frac{1}{2}$

⚠ Privilégier les nœuds du quadrillage pour lire  $m$ .

### Vecteur directeur et équation réduite

Si une droite (D) est donnée par son **équation réduite**, elle admet pour **vecteur directeur**  $\vec{u}(1; m)$  ou tout vecteur colinéaire à  $\vec{u}$

Soient (D) :  $y = mx + p$  et (D') :  $y = m'x + p'$

- Si  $m = m'$  alors, (D) // (D')
- Si  $m \neq m'$  alors, (D) et (D') **sécantes**

⚠ Si  $m m' = -1$  alors, (D)  $\perp$  (D') (cf produit scalaire)

### Droites particulières

- Les droites **verticales** :  $x = a, a \in \mathbb{R}$   
L'équation  $x = 0$  représente l'axe des ordonnées.  
Pas de coefficient directeur. La **pente est « infinie »**.  
Les droites verticales sont dirigées par le vecteur  $\vec{j}(0; 1)$  ou tout autre vecteur colinéaire à  $\vec{j}$
- Les droites **horizontales** :  $y = p, p \in \mathbb{R}$   
L'équation  $y = 0$  représente l'axe des abscisses.  
Le coefficient directeur est **nul**.  
Les droites horizontales sont dirigées par le vecteur  $\vec{i}(1; 0)$  ou tout autre vecteur colinéaire à  $\vec{i}$ .

### Équation cartésienne d'une droite

Soit (D) une droite. Elle admet une équation cartésienne i.e. une description de la forme :

$$ax + by + c = 0, \quad \text{où } (a; b) \neq (0; 0)$$

⚠ Cette équation n'est pas unique.

- Si  $b = 0$ , la droite (D) est **verticale**.
- Si  $a = 0$ , la droite (D) est **horizontale**.

La droite (D) admet :

- pour **vecteur directeur**  $\vec{u}(-b; a)$  ou tout vecteur colinéaire à  $\vec{u}$ ;
- pour **vecteur normal**  $\vec{n}(a; b)$  ou tout vecteur colinéaire à  $\vec{n}$ . On a alors  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

### Droites parallèles et droites sécantes

Soient  $\begin{cases} (D) : ax + by + c = 0 \\ (D') : a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

- (D) // (D')  $\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$  **colinéaires**  
 $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{u}') = 0 \Leftrightarrow -ba' - a(-b') = 0$
- Si (D) et (D') sont **sécantes** en I, les coordonnées de I sont **solutions** du système  $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

### Méthode pour déterminer une équation cartésienne

Soient les point A(1 ; 2) et B(3 ; -4).

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

$M(x ; y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  colinéaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 3-1 \\ y-2 & -4-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -6(x-1) - 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 - 2y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x - 2y + 10 = 0 \stackrel{\div(-2)}{\Leftrightarrow} 3x + y - 5 = 0$$

### Quelques contextes et questions classiques

- Une droite est définie par 2 points distincts ou par un point et un vecteur directeur (non nul).

- Vecteur et coefficient directeur

(D) :  $3x + 5y + 2 = 0$  alors un vecteur directeur est  $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

L'équation réduite (D) :  $y = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{3}$  a pour coefficient directeur  $m = -\frac{3}{5}$

- Lorsqu'il s'agit de démontrer que trois droites sont concourantes, on détermine le point d'intersection I des deux premières droites et l'on vérifie que I appartient à la troisième!

**Remarque :** Bien entendu, s'il s'agit de droites remarquables du triangle : médianes, hauteurs, médiatrices ou bissectrices, d'après leurs propriétés, on peut affirmer qu'elles sont concourantes sans avoir à le démontrer.

- Un contexte fréquent est celui d'une famille « infinie » de droites

**Exemple :** Soit  $m \in \mathbb{R}$ , on pose  $d_m : (2m+3)x - (m-1)y - 10 = 0$

**Le principe :** À chaque valeur du paramètre  $m$ , on associe une droite :

Si  $m = 1$  alors  $d_1 : 5x - 10 = 0$  droite verticale.

Si  $m = 2$  alors  $d_2 : 7x - y - 10 = 0$  etc.

Dans ces exercices, il s'agit d'étudier les propriétés de cette famille.