# Contrôle de mathématiques

## Jeudi 16 décembre 2010 correction

### Exercice 1

**Dérivées (13 points)**

1) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$ $\qquad f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

2) $f(x) = \dfrac{3}{2x-3}$ $\qquad f$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

de la forme $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$$f'(x) = -\frac{6}{(2x-3)^2}$$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

3) $f(x) = \dfrac{3x-2}{4x+1}$ $\qquad f$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$

de la forme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(4x+1) - 4(3x-2)}{(4x+1)^2} \\ &= \frac{12x + 3 - 12x + 8}{(4x+1)^2} \\ &= \frac{11}{(4x+1)^2} \end{aligned}$$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

4) $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{2x-3}$ $\qquad f$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

de la forme $(u+v)' = u' + v'$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{4}{(2x-3)^2} = \frac{(2x-3)^2 - 4}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{(2x-3-2)(2x-3+2)}{(2x-3)^2} = \frac{(2x-5)(2x-1)}{(2x-3)^2} \end{aligned}$$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

5) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ $\qquad f$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$

de la forme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+1)}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 + 2x}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{-6x}{(x^2-4)^2} \end{aligned}$$

6) $f(x) = x^2\sqrt{2x+5}$ $\qquad$ pour que $f$ soit dérivable, il faut que $2x+5 > 0$, donc $f$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$

de la forme $(uv)' = u'v + uv'$ et $\left(\sqrt{u}\right) = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sqrt{2x+5} + x^2 \times \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} \\ &= \frac{2x(2x+5) + x^2}{\sqrt{2x+5}} \\ &= \frac{5x(x+2)}{\sqrt{2x+5}} \end{aligned}$$

7) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^3$ $\qquad f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

de la forme $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

$$f'(x) = 3(2x-3)(x^2-3x+2)^2 = 3(x-1)^2(x-2)^2$$

8) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{2x^2+x-3}$ $\qquad f$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \left(-\dfrac{3}{2}; 1\right)$

En effet les racines de $2x^2 + x - 3$ sont $x' = 1$ (racine évidente) et $x'' = -\dfrac{3}{2}$

de la forme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x+2)(2x^2+x-3)-(4x+1)(x^2+2x+1)}{(2x^2+x-3)^2} \\
&= \frac{4x^3+2x^2-6x+4x^2+2x-6-4x^3-8x^2-4x-x^2-2x-1}{(2x^2+x-3)^2} \\
&= -\frac{3x^2+10x+7}{(2x^2+x-3)^2} \\
&= -\frac{(3x+7)(x+1)}{(2x^2+x-3)^2}
\end{aligned}$$

## Exercice 2

**Polynôme (3 points)**

1) On a $P'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

2) La tangente au point d'abscisse 2 :

$$y = P'(2)(x-2) + P(2)$$

On a $P'(2) = 12$ et $P(2) = 3$, l'équation de la tangente est donc :

$$\begin{aligned}
y &= 12(x-2) + 3 \\
y &= 12x - 21
\end{aligned}$$

3) A l'aide d'une calculatrice, on trouve que $P(x) = 0$ admet une solution $x_0$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$x_0 \simeq 1{,}677\,650\,699$$

## Exercice 3

**Fonction rationnelle (4 points)**

On donne la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = 4x + 3 + \dfrac{9}{x-2}$

1) On a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4 - \frac{9}{(x-2)^2} \\
&= \frac{4(x-2)^2 - 9}{(x-2)^2} \\
&= \frac{[2(x-2)-3][2(x-2)+3]}{(x-2)^2} \\
&= \frac{(2x-7)(2x-1)}{(x-2)^2}
\end{aligned}$$

2) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{7}{2} \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{1}{2}.$

3) On obtient donc une tangente horizontale en chacun de ces points.

4) signe$f'(x)$ = signe$(2x-7)(2x-1)$, on obtient alors le tableau de variation suivant :