Contrôle de mathématiques

Jeudi 03 février 2011

Exercice 1

Tableau de variation (2,5 points)

On donne le tableau de variation ci-dessous d'une fonction f.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	-2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	0

Utiliser ce tableau pour :

1) déterminer l'ensemble de définition : D_f ;
2) déterminer les limites aux bornes de D_f ;
3) déterminer les asymptotes éventuelles ;
4) tracer une courbe éventuelle vérifiant $f(-4) = f(-1) = f(1) = 0$.

Exercice 2

Asymptote oblique (2,5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$
2) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Quelle est la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

Exercice 3

Limites (5 points)

1) Soit le fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x + 5}{1 - x}$
déterminer, en vous justifiant, les limites suivantes et donner les asymptotes éventuelles. (2 pts)

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ par : $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{3x - 2}$

Déterminer, en vous justifiant, les limites suivantes : (1 pt)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

3) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ par : $h(x) = \dfrac{3x - 10}{x^2 - 4}$ (2 pts)

a) Déterminer le signe de $x^2 - 4$ suivant les valeurs de x.
En déduire les limites suivantes, en vous justifiant, et donner les asymptotes éventuelles.

b) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} h(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} h(x)$ c) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} h(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} h(x)$

Exercice 4

Etude de fonction (10 points)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3x + 5}$.

1) Déterminer l'ensemble définition D_f de la fonction f. (0,5 pt)
2) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. (1 pt)
3) Déterminer la fonction dérivée f' puis déterminer son signe. (1,5 pt)
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f. (0,5 pt)
5) Montrer que l'on peut mettre la fonction f sous la forme : (1 pt)

$$f(x) = x + 3 + \frac{4x - 15}{x^2 - 3x + 5}$$

6) Montrer que le droite (Δ) d'équation : $y = x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f. On précisera la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (Δ). (1,5 pt)
7) Montrer que (Δ) coupe la courbe en un point Ω que l'on précisera. (1 pt)
8) Justifier que l'équation $f(x) = 5$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$. Donner, en utilisant votre calculatrice, un encadrement à 10^{-2} de α. (1,5 pt)
9) Tracer $\mathscr{C}_f$ et l'asymptote (Δ). (1,5pt)