Devoir sur les suites
Correction 01 mars 2011

Exercice 1 :

Somme de termes d'une suite arithmétique

1) Calculer u_1 et S_{17} lorsque $u_{17} = 105$ et $r = 2$
On a :
$$u_{17} = u_1 + 16r \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = u_{17} - 16r = 105 - 32 = 73$$
On a alors : $S_{17} = 17\left(\dfrac{u_1 + u_{17}}{2}\right) = 1513$

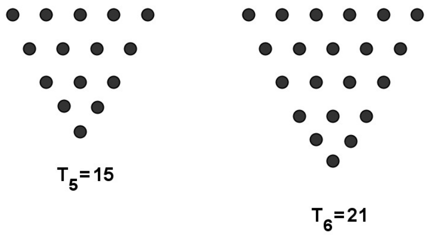
2) Calculer u_1 et u_{33} lorsque $r = -7$ et $S_{33} = 0$
$$S_{33} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 33\left(\frac{u_1 + u_{33}}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{33} = -u_1$$
or $u_{33} = u_1 + 32r$, donc :
$$u_1 + 32r = -u_1 \quad \Leftrightarrow \quad 2u_1 = -32r \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = -16r = 112$$
on a : $u_1 = 112$ et $u_{33} = -112$

3) Calculer n et u_1 lorsque $u_n = 14$, $r = 7$ et $S_n = -1176$
De $u_n = 14$ on a $u_1 = 14 - 7(n-1)$
De $S_n = -1176$ on a $\dfrac{n}{2}(u_1 + u_n) = -1176$, en remplaçant, on obtient :
$$\begin{aligned}\frac{n}{2}[14 - 7(n-1) + 14] &= -1176\\ n[28 - 7(n-1)] &= -2352\\ 28n - 7n(n-1) + 2352 &= 0\\ -7n^2 + 35n + 2352 &= 0\\ n^2 - 5n - 336 &= 0\end{aligned}$$
On calcule $\Delta = 25 + 1344 = 1369 = 37^2$, on obtient la racine positve :
$$n = \frac{5 + 37}{2} = 21$$
On en déduit alors $u_1 = 14 - 7 \times 20 = -126$

Exercice 2 :

Nombres triangulaires

1) Représenter et donner les valeurs de T_5 et T_6.



2) Ecrire un algorithme sur votre calculatrice et donner les valeurs de T_{12} et T_{60}. Retrouver ces résulats par le calcul.

```
: Prompt N
: 0 → T
: For(I,1,N)
:    T + I → T
: End
: Disp T
```

On trouve alors $T_{120} = 78$ et $T_{60} = 1830$

On trouve le nombre triangulaire suivant en additionnant le précédent à ce nombre, donc :

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

on retrouve alors les résultats trouvés.

3) Utiliser le programme pour trouver les valeurs de n telles que : $T_n \geqslant 100$ puis $T_n \geqslant 1000$. On peut éventuellement réécrire un programme :

```
: Prompt N
: 0 → I
: 0 → T
: While T < N
:    I + 1 → I
:    T + I → T
: End
: Disp I
```

On trouve alors : $n \geqslant 14$ et $n \geqslant 45$

Par le calcul il faut résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{n(n+1)}{2} \geqslant 100$$
$$n(n+1) \geqslant 200$$
$$n^2 + n - 200 \geqslant 0$$

On calcule $\Delta = 1 + 800 = 801$

On prend la racine positive :

$$n = \frac{-1 + \sqrt{801}}{2} \simeq 13,7$$

La quantité est positive à l'extérieur des racines. On retrouve alors $n \geqslant 14$

$$\frac{n(n+1)}{2} \geqslant 1000$$
$$n(n+1) \geqslant 2000$$
$$n^2 + n - 2000 \geqslant 0$$

On calcule $\Delta = 1 + 8000 = 8001$

On prend la racine positive :

$$n = \frac{-1 + \sqrt{8001}}{2} \simeq 44,2$$

La quantité est positive à l'extérieur des racines. On retrouve alors $n \geqslant 45$

Exercice 3 :

Un algorithme

1) Quelle est la suite (u_n) définie par récurrence dont ce programme calcule le terme u_n.

C'est la suite de premier terme $u_0 = 1$ et de relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{A}{u_n}\right)$

2) On prend $A = 2$

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

On a :

$$u_1 = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408}$$

b) Faire un programme sur votre calculette puis donner une approximation du terme u_{10}.

: Prompt A
: Prompt N
: $1 \rightarrow U$
: For(I,1,N)
: $\dfrac{1}{2}\left(U + \dfrac{2}{U}\right) \rightarrow U$
: End
: Disp U

On trouve alors : $u_{10} \simeq 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,8$

c) Que semble calculer la suite (u_n) ? La suite donne des approximation de plus en plus fine de $\sqrt{2}$. Cette suite converge très vite.

Par exemple : $|\sqrt{2} - u_3| \simeq 0,2 \times 10^{-5}$

3) Prenez plusieurs valeur de A et indiquer le terme u_{10} qui permet de confirmer votre conjecture. Cette suite s'appelle la suite du Heron.

Cette suite calcule bien, les approximations de plus en plus fines de $\sqrt{A}$. Par exemple :

$$\text{Si } A = 7, \text{ on a} \quad u_{10} \simeq 2{,}645\,751\,311\,064\,590\,590\,5 \quad \text{et} \quad |\sqrt{7} - u_{10}| \simeq 0$$

Exercice 4 :

Forage

1) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison. Exprimer alors u_n en fonction de n.

Comme le coût du mètre suivant vaut 50 € de plus que le précédent, on a alors : $u_{n+1} = u_n + 50$ qui est bien une suite arithmétique. On a alors :

$$u_n = 1000 + 50(n-1) = 950 + 50n$$

2) Montrer que le nombre de mètres n que l'on peut forer avec le crédit alloué vérifie : $n^2 + 39n - 20\,790 = 0$
Comme on dispose de 519 750 €, on a la relation :

$$\begin{aligned} S_n &= 519\,750 \\ n \times \frac{u_1 + u_n}{2} &= 519\,750 \\ n[1000 + 1000 + 50(n-1)] &= 1\,039\,500 \\ 2000n + 50n^2 - 50n &= 1\,039\,500 \\ n^2 + 39n - 20\,790 &= 0 \end{aligned}$$

3) Quelle est alors la profondeur du forage.
Il faut résoudre cette équation :

On calcule $\Delta = 1521 = 84681 = 291^2$

On obtient alors la racine positive : $n = \dfrac{-39 + 291}{2} = 126$

On peut donc forer 126 m

Exercice 5 :

Problème de loyer

1) **Contrat n°1**

a) Calculer le loyer u_1 payé la deuxième année. On appelle u_0 le loyer de la 1re année. Si le loyer a augmenté de 5 %, il a donc été multiplié par 1,05, on a donc :

$$u_1 = 1,05 \times 4800 = 5040$$

b) Exprimer u_n - loyer de la $(n+1)^e$ année - en fonction de n. Calculer u_8 (loyer de la 9e année)
Pour u_n, on aura multiplié n fois par 1,05, on obtient donc :

$$u_n = 1,05^n \times 4800 \quad \text{donc} \quad u_8 = 1,05^8 \times 4800 = 7091,79$$

c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat.
On a alors :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots u_8 = 4800 \times \frac{1 - 1,05^9}{1 - 1,05} = 52\,927,51$$

2) **Contrat n°2**

a) Calculer le loyer v_1 payé pour la deuxième année. On appelle v_0 le loyer de la 1re année. Comme l'augmentation est contante, il s'agit d'une suite arithmétique

$$v_1 = 4800 + 280 = 5080$$

b) Exprimer v_n - loyer de la $(n+1)^e$ année - en fonction de n. Calculer v_8 (loyer de la 9ème année)

$$v_n = 4800 + 280n \quad \text{donc} \quad v_8 = 4800 + 8 \times 280 = 7040$$

c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat. On a alors :

$$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_8 = 9 \times \left(\frac{4800 + 7040}{2} \right) = 53\,280$$

$S < S'$ C'est donc le premier contrat qui est le plus avantageux sur 9 ans. Cependant sur une plus longue période, le contrat deux deviendrait plus avantageux