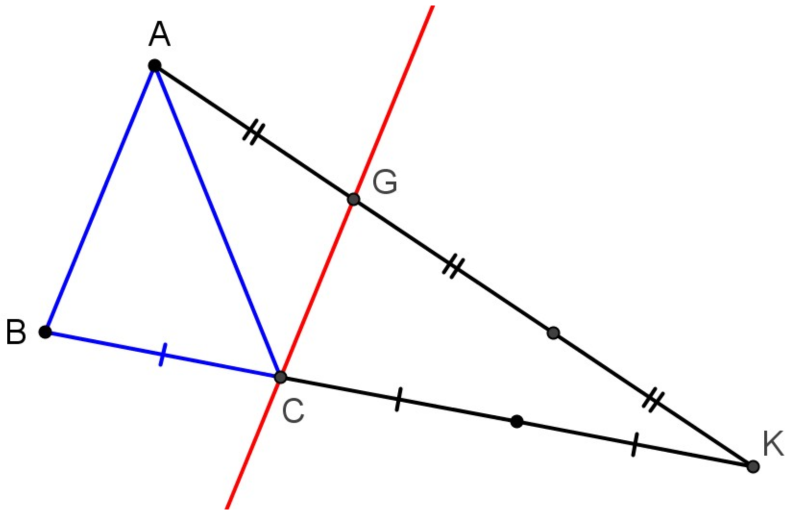
Contrôle de mathématiques

Jeudi 5 mai 2011

Exercice 1

Placer un barycentre (4 points)

1) On obtient la figure suivante :



Soit K le barycentre de $(B, -2)$, $(C, 3)$, on a alors :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC}$$

D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de $(A, 2)$, $(K, 1)$, donc :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$$

Pour démontrer que $(AB)//(CG)$, deux possibilités :

➽ (par les vecteurs), on revient à la définition :

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{CG} &= \vec{0}\\
2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}) - 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}) + 3\overrightarrow{CG} &= \vec{0}\\
2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CG} - 2\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CG} + 3\overrightarrow{CG} &= \vec{0}\\
2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + 3\overrightarrow{CG} &= \vec{0}\\
2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CG} &= \vec{0}\\
\overrightarrow{CG} &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

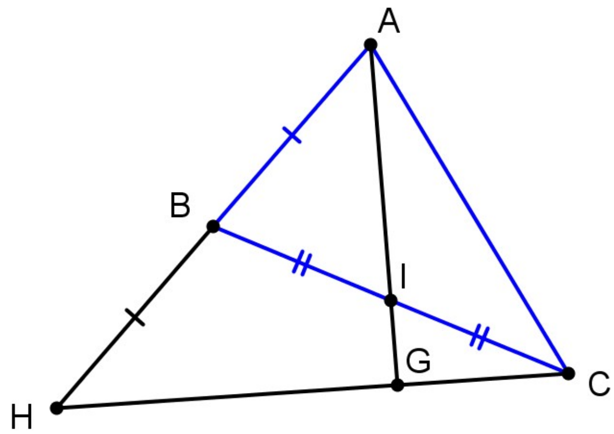
Les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc $(CG)//(AB)$

- (La réciproque de Thalès). On montre facilement que :

$$\overrightarrow{KC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KA}$$

Comme $\dfrac{KC}{KB} = \dfrac{KG}{KA}$ alors d'après la réciproqie de Thalès $(CG)//(AB)$

2) On a la figure ci-dessous :



Si I est le milieu de $[BC]$ alors I est le barycentre de $(B, 2)$ et $(C, 2)$. D'après le théorème d'associativité, G est alors le barycentre de $(A, -1)$ et $(I, 4)$. Donc :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{4}{4-1}\overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$$

Si H est le symétrique de A par rapport à B, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH} &= \vec{0} \\ (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}) + \overrightarrow{BH} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{BH} &= \vec{0} \\ -\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} &= \vec{0} \end{aligned}$$

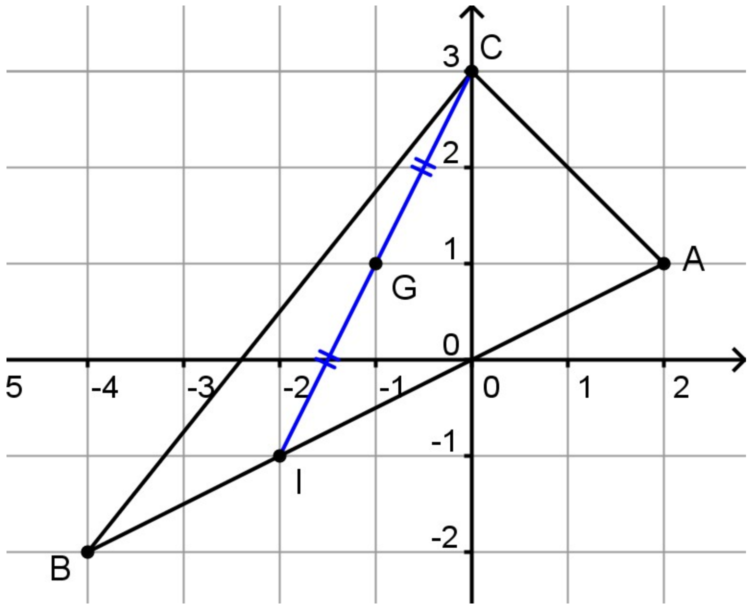
Donc H est le barycentre de $(A, -1)$ et $(B, 2)$. D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de $(H, 1)$ et $(C, 2)$, donc :

$$\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HC}$$

H, G et C sont alignés.

Exercice 2
Dans un repère (4 points)

1) On a la figure suivante :



2) Les coordonnées de G vérifient : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{6} \times 2 - 4 \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \times 0 = -1 \\ y_G = \dfrac{1}{6} \times 1 - 2 \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \times 3 = \dfrac{1-4+9}{6} = 1 \end{cases}$$

3) Les coordonnées de I vérifient : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{1}{3} \times 2 - 4 \times \dfrac{2}{3} = -2 \\ y_I = \dfrac{1}{3} \times 1 - 2 \times \dfrac{2}{3} = -1 \end{cases}$$

4) D'après le théorème d'associativité, G est donc le barycentre de $(I, 3)$ et $(C, 3)$, donc G est le milieu de $[IC]$.

Exercice 3

Lignes de niveaux (3 points)

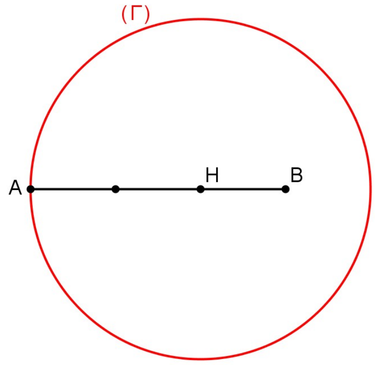
1) Soit H le barycentre de $(A; 1)$, $(B; 2)$, on a d'après la formule de réductiion :

$$\forall M, \quad \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MH}$$

L'ensemble Γ devient donc : $||3\overrightarrow{MH}|| = 2AB$ soit $MH = \frac{2}{3}AB$

Γ est donc le cercle de centre H et de rayon $\frac{2}{3}AB$

2) Pour placer H, on a : $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. On observe alors que $AH = \frac{2}{3}AB$, donc A appartient à Γ. On a alors la figure suivante :



Exercice 4

Ensemble de points (3 points)

1) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

or $ABCD$ est un rectangle donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc

$$= \overrightarrow{0}$$

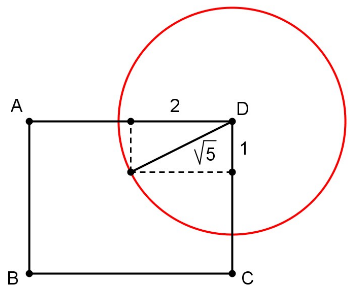
2) Si $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$ alors D est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, -1)$ et $(C, 1)$. D'après la formule de réduction :

$$\forall M, \quad \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (1 - 1 + 1)\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MD}$$

Donc $||\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = \sqrt{5}$ devient $MD = \sqrt{5}$.

Donc l'ensemble des point M est le cercle de centre D est de rayon $\sqrt{5}$

Pour déterminer la longueur $\sqrt{5}$, on trace un rectangle de longueur 2 et de largeur 1. Sa diagonale vaut alors $\sqrt{5}$.



Exercice 5

Barycentre de quatre points (2 points)

Soit G le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$, $(D, 1)$.

Soit I le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ donc $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Soit J le barycentre de $(C, 2)$, $(D, 1)$ donc $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

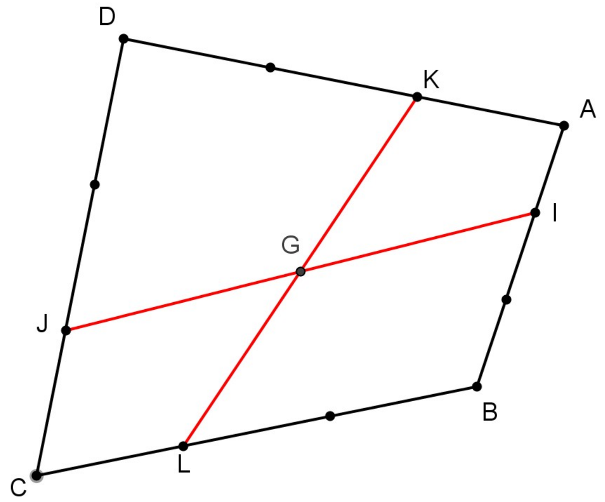
D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de $(I, 3)$, $(J, 3)$. Donc G est sur la droite (IJ).

Soit K le barycentre de $(A, 2)$, $(D, 1)$ donc $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Soit L le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 2)$ donc $\overrightarrow{BL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

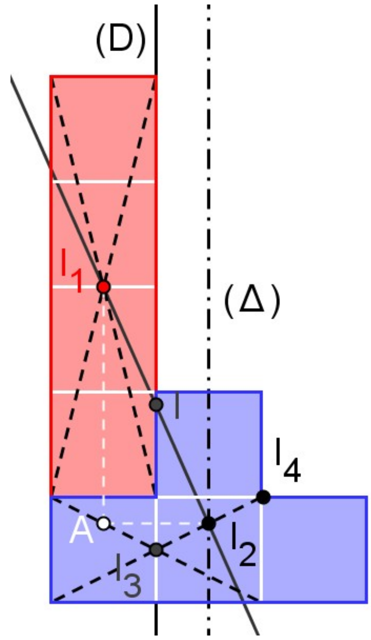
D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de $(K, 3)$, $(L, 3)$. Donc G est sur la droite (KL).

G est donc l'intersection des droites (IJ) et (KL)



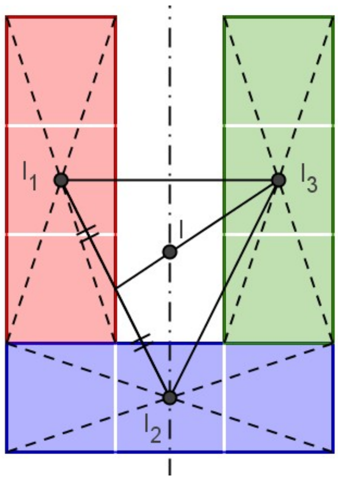
Exercice 6

Centre d'inertie (4 points)



Pour la première plaque, on sépare celle-ci en deux : les 4 premiers carreaux verticaux et les quatre restants.
La 1re sous-plaque a comme centre d'inertie I_1 (intersection des diagonales).
La 2e sous-plaque a un axe de symétrie (Δ). Donc $I_2 \in (\Delta)$
On sépare cette deuxième sous-plaque en deux de centre d'inertie I_3 et I_4. On a alors I_2 intersection de (Δ) et (I_3I_4).

Le centre d'inertie de toute la plaque est alors l'isobarycentre de I_1 et de I_2. I est alors le milieu de $[I_1I_2]$. Par le théorème des milieux, il se situe sur (D).



On sépare la deuxième plaque en 3 sous-plaques de 3 carreaux.
On obtient I_1, I_2 et I_3 les trois centres d'inertie.
I est alors l'isobarycentre de I_1, I_2 et I_3 soit le centre de gravité du triangle $I_1I_2I_3$ (intersection des médianes)