

Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 19 décembre 2018

EXERCICE 1

Nombre dérivé

(3 points)

x	-6	-3	-1	3	6
$f(x)$	-1	-2	1	3	0
$f'(x)$	-1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$

1) On a le tableau suivant :

2) On pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$ et $h = 0,12$, et on dérive $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. On a alors :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) \Leftrightarrow f(9,12) \approx f(9) + 0,12f'(9) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{9,12} \approx \sqrt{3} + 0,12 \times \frac{1}{2\sqrt{9}} \Leftrightarrow \sqrt{9,12} \approx 3,02$$

Valeur à comparer avec la valeur que donne la calculatrice : $\approx 3,019\,933$.

EXERCICE 2

Calcul de dérivées

(9 points)

Fonction	Dérivabilité	Dérivée
1) $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 3x + 2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 12x^2 - 18x + 3 = 3(4x^2 - 6x + 1)$
2) $f(x) = -\frac{2}{x^3}$	\mathbb{R}^*	$f'(x) = \frac{6}{x^4}$
3) $f(x) = \sqrt{4x+1}$	$\left] -\frac{1}{4}; +\infty \right[$	$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$
4) $f(x) = \frac{4}{1+3x}$	$\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$	$f'(x) = \frac{4 \times (-3)}{(1+3x)^2} = \frac{-12}{(1+3x)^2}$
5) $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$	\mathbb{R}	$f'(x) = \frac{x^2+9-2x^2}{(x^2+9)^2} = \frac{9-x^2}{(x^2+9)^2}$ $= \frac{(3-x)(3+x)}{(x^2+9)^2}$
6) $f(x) = x\sqrt{2x-3}$	$\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$	$f'(x) = \sqrt{2x-3} + \frac{2x}{2\sqrt{2x-3}}$ $= \frac{2x-3+x}{\sqrt{2x-3}} = \frac{3(x-1)}{\sqrt{2x-3}}$

Fonction	Dérivabilité	Dérivée
7) $f(x) = x - \frac{4x+1}{7x+2}$	$\mathbb{R} - \left\{ -\frac{2}{7} \right\}$	$f'(x) = 1 - \frac{4(7x+2) - 7(4x+1)}{(7x+2)^2}$ $= 1 - \frac{1}{(7x+2)^2} = \frac{(7x+2)^2 - 1}{(7x+2)^2}$ $= \frac{(7x+2-1)(7x+2+1)}{(7x+2)^2}$ $= \frac{(7x+1)(7x+3)}{(7x+2)^2}$
8) $f(x) = (3x+5)^4$	\mathbb{R}	$f'(x) = 4 \times 3(3x+5)^3 = 12(3x+5)^3$

EXERCICE 3**Étude d'une fonction****(5 points)**1) $D_f = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2 \geq 2 > 0$ (ne s'annule pas).

2) $f'(x) = \frac{8(x^2+2) - 2x(8x+4)}{(x^2+2)^2} = \frac{8x^2+16-16x^2-8x}{(x^2+2)^2} = \frac{-8x^2-8x+16}{(x^2+2)^2} = \frac{8(-x^2-x+2)}{(x^2+2)^2}$

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0$ d'où $x_1 = 1$ racine évidente, $P = -2$ donc $x_2 = -2$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		
$f(x)$		0		-2		4		0

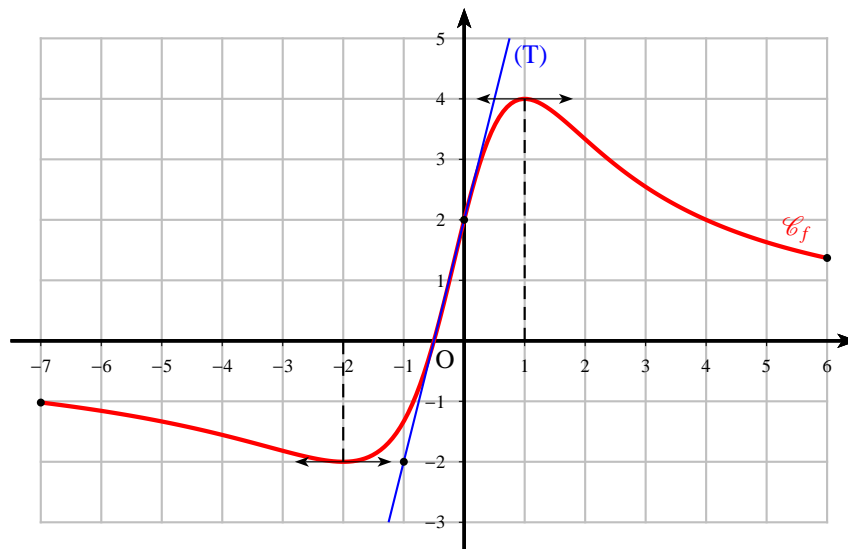
$$f(-2) = \frac{-16+4}{4+2} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$f(1) = \frac{8+4}{1+2} = \frac{12}{3} = 4$$

4) Quand x devient "très grand" alors $8x+4 \approx 8x$ et $x^2+2 \approx x^2$ donc $f(x) \approx \frac{8x}{x^2} \approx \frac{8}{x}$.Comme 8 sur "très grand" devient "très petit" alors $f(x)$ tend vers 0.5) La tangente (T) en 0 a comme équation : $y = f'(0)x + f(0)$

$$f(0) = 2 \text{ et } f'(0) = \frac{16}{4} = 4 \text{ donc (T) : } y = 4x + 2.$$

6) D'après le tableau de variation : $\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq f(x) \leq 4$.7) Pour tracer (T), on peut prendre les points $(-1; -2)$ et $(0; 2)$.Pour tracer \mathcal{C}_f , on peut calculer en plus deux images : $f(-7) \approx -1$ et $f(6) \approx 1,4$

**EXERCICE 4****Aire maximale****(3 points)**

1) Comme l'abscisse de A est positive $I = [0 ; 3]$.

$$2) S(x) = 2xf(x) = -\frac{8}{9}(x^2 - 9) = -\frac{8}{9}x^3 + 8x.$$

$$3) S'(x) = -\frac{8}{3}x^2 + 8 = \frac{8}{3}(-x^2 + 3).$$

$$4) S'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{3}.$$

Le signe de $S'(x)$ est le signe de $(-x^2 + 3)$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	$\sqrt{3}$	3
$S'(x)$		+	0
			-
$S(x)$		$S(\sqrt{3})$	
	0	↗	↘
			0

L'aire est maximale pour $x = \sqrt{3}$, l'aire vaut alors : $S(\sqrt{3}) = \frac{16\sqrt{3}}{3} \approx 9,24$.