Exercices

Généralités sur les fonctions

Exercice 1 :

Axe de symétrie

1) Sur votre calculatrice tracer la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x - 1$
2) Le graphique permet de conjecturer un axe de symétrie. Quel est son équation ?
3) Démontrer cette conjecture

Exercice 2 :

Centre de symétrie

1) Sur votre calculatrice tracer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$
2) Le graphique permet de conjecturer un centre de symétrie. Quelles sont ses coordonnées ?
3) Démontrer cette conjecture

Exercice 3 :

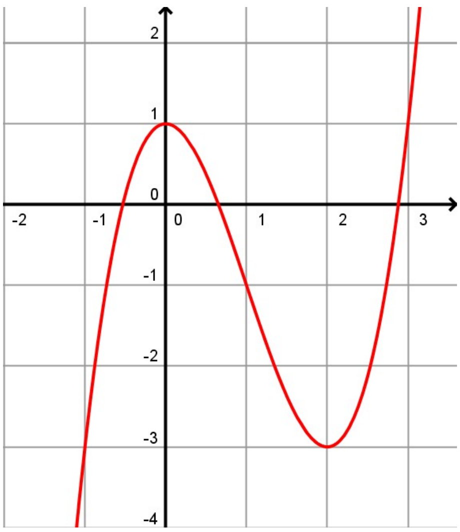
Axe de symétrie

1) Sur votre calculatrice tracer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4x}$
2) Le graphique permet de conjecturer un axe de symétrie. Quel est son équation ?
3) Démontrer cette conjecture

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ représentée ci-dessous.

1) Déduire les courbes des fonctions g, h, k définies sur $\mathbb{R}$ par :
   a) $g(x) = -f(x)$
   b) $h(x) = |f(x)|$
   c) $k(x) = f(-x)$
2) On définie sur $\mathbb{R}$ la fonction F par : $F(x) = f(|x|)$.
   a) Démontrer que la fonction F est paire
   b) En déduire la représentation de F



Exercice 5 :

Résolution graphique

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 15$ dont la représentation se trouve ci-dessous :

1) Déterminer le tableau de variation de la fonction f

2) Résoudre les équations suivantes :

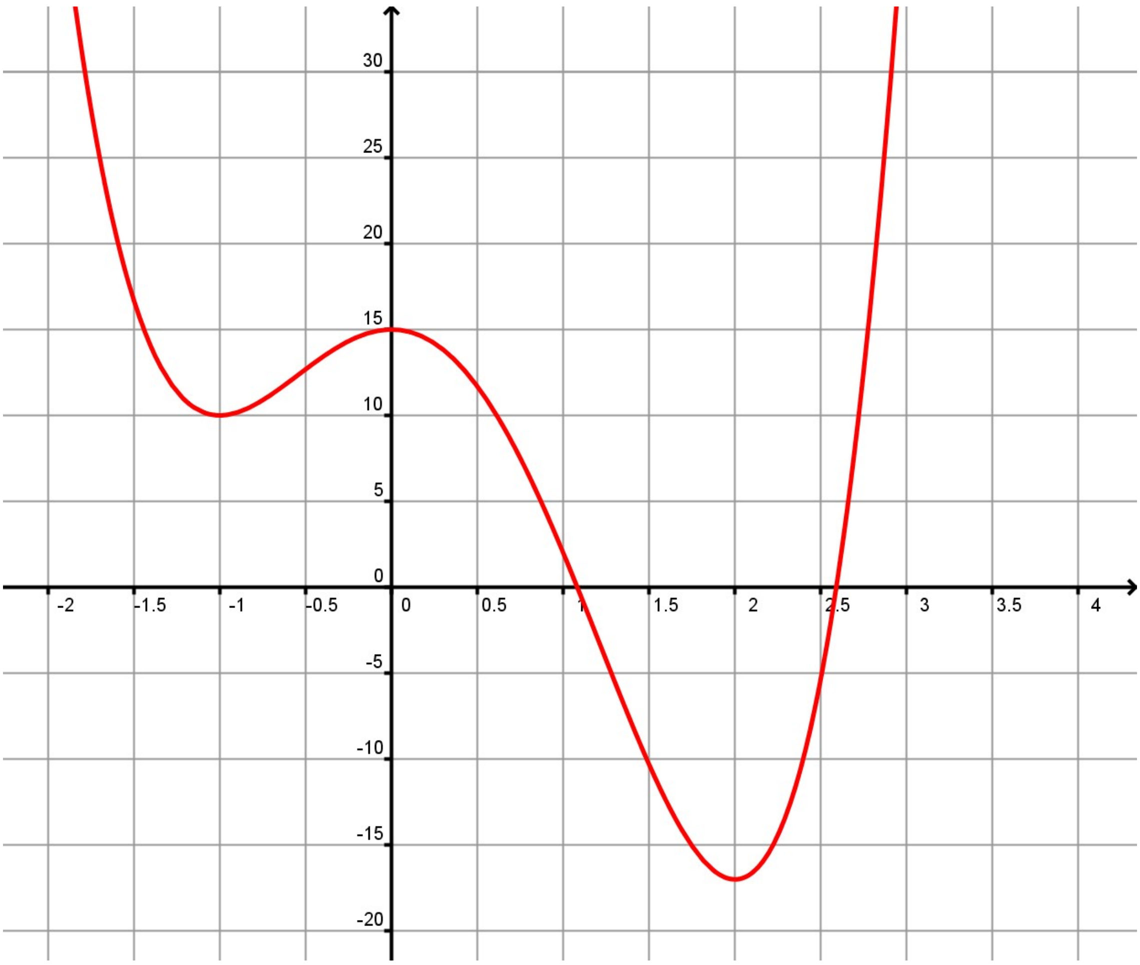
   a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 13$

3) D'une façon générale donner le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$ où m est un réel quelconque.

4) Résoudre les inéquations suivantes :

   a) $f(x) \leqslant 0$ b) $f(x) > 13$

5) Résoudre l'équation $f(x) = 3x$



Exercice 6 :

Composée de deux fonctions

Pour les cas suivants, calculer $g \circ f(x)$, $f \circ g(x)$ après avoir préciser les ensembles de définition des fonctions f, g, $g \circ f$ et $f \circ g$.

1) $f(x) = 3x - 1$; $g(x) = 2x + 1$.

2) $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x - 1$.

3) $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = \frac{1}{x}$.

4) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $g(x) = 3x$.

5) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$; $g(x) = \frac{1}{x} + 1$.

Exercice 7 :

Décomposition d'une fonction

Pour les cas suivants, démontrer que la fonction f est la composée de fonctions de référence. On posera $f = h \circ g$.

1) $f(x) = \frac{1}{3x-1}$

2) $f(x) = \sqrt{x+3}$

3) $f(x) = 2\sqrt{x} + 4$

4) $f(x) = \frac{5}{x} - 1$

5) $f(x) = (x+3)^2$

6) $f(x) = 2x^2 - 1$

7) $f(x) = 3\sin x + 2$

8) $f(x) = \sin(3x + 2)$

Exercice 8 :

f et g sont les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1} \qquad g(x) = \frac{x}{x+2}$$

On pose $h = g \circ f$.

1) Trouver l'ensemble de définition de h et calculer explicitment $h(x)$.

2) La fonction k est définie par $k(x) = \frac{x+3}{3x+5}$. Les fonctions h et k sont-elles égales ?

Exercice 9 :

Sens de variation

En écrivant f comme la composée de deux fonctions usuelles, en déduire les variation de f sur l'intervalle I donné. On posera $f = h \circ g$.

1) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ $\qquad I = \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

2) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ $\qquad I =]-1 ; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $\qquad I =]-\infty ; 0[$

Exercice 10 :

Le tableau de variation suivant est celui d'une fonction f définie sur $[-3; 3]$

x	-3		0		3
$f(x)$	7	↘	1	↗	5

On définit les fonctions g et h par :

$$g(x) = -2x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{x}$$

Déterminer les variations puis dresser le tableau de variations des fonctions suivantes :

a) $g \circ f$ b) $h \circ f$

Exercice 11 :

h est une fonction dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	0		5		9
$h(x)$	9	↘	0	↘	-1

f et g sont les fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = x^2$$

On note $u = f \circ h$ et $v = g \circ h$

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

a) u est définie sur $[0; 9]$

b) u est décroissante sur $[0; 5]$

c) $u(x)$ appartient à l'intervalle $[0; \sqrt{5}]$

d) v est définie sur $[0; 9]$

e) v est décroissante sur $[0, 9]$