

LA fonction dérivée

Table des matières

1	Un problème historique	3
2	Limite en un point	4
2.1	Définition	4
2.2	Exemples	5
2.3	Continuité	5
3	Le nombre dérivé	6
3.1	Définition	6
3.2	Exemples	6
4	Fonction dérivée. Dérivée des fonctions élémentaires	8
4.1	Définition	8
4.2	Fonction dérivée des fonctions élémentaires	8
4.2.1	Fonction affine	8
4.2.2	Fonction carrée	9
4.2.3	Fonction puissance	9
4.2.4	Fonction inverse	9
4.2.5	Fonction puissance inverse	10
4.2.6	Fonction racine	10
4.3	Règles de dérivation	10
4.3.1	Dérivée de la somme	11
4.3.2	Produit par un scalaire	11
4.3.3	Dérivée du produit	11
4.3.4	Dérivée de l'inverse	12
4.3.5	Dérivée du quotient	13
4.3.6	Dérivée de la puissance et de la racine	14
4.4	Tableau récapitulatif	14
5	Interprétation géométrique, numérique et cinématique	15
5.1	Équation de la tangente	15
5.2	Approximation affine	16
5.3	Point de vue !	17
5.4	Cinématique	19
6	Sens de variation d'une fonction	20
6.1	Aperçu géométrique	20
6.2	Sens de variation	21
6.3	Extremum d'une fonction	22

7	Théorème des valeurs intermédiaires	22
7.1	Le théorème	22
7.2	Application	23
7.3	Valeur approchée d'une solution	24
7.4	Fonction auxiliaire	25
8	Problème d'optimisation	28

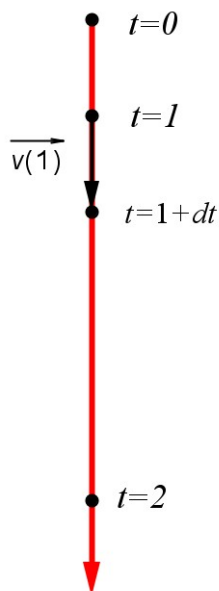
1 Un problème historique

La notion de fonction dérivée que nous verrons dans ce chapitre ne s'est pas construite en un jour. Un petit problème historique va nous permettre de comprendre les difficultés qu'on rencontrées les mathématiciens pour définir la fonction dérivée.

Newton (1643 - 1727), qui avait une chaire de mathématique, voulu résoudre le problème de la vitesse instantané. Soit une pierre que l'on lache à $t = 0$ s. Quelle est sa vitesse instantanée au bout d'une seconde ?

Newton savait depuis Galilée que si l'on néglige la force de frottement de l'air sur la pierre (matière compacte), sa vitesse ne dépend pas de sa masse. Galilée a pu déterminer l'équation horaire (position de l'objet en fonction du temps) d'un objet en chute libre. Cette équation est de la forme ($g = 10 \text{ m/s}^2$ accélération de la pesanteur) :

temps en seconde



$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 5t^2$$

Pour calculer la vitesse instantanée en $t = 1$, on mesure la distance entre les instant $t = 1$ et $t = 1 + dt$, où l'intervalle de temps dt est le plus petit possible.

$$v(1) = \frac{z(1 + dt) - z(1)}{dt}$$

$$v(1) = \frac{5(1 + dt)^2 - 5}{dt}$$

$$v(1) = \frac{5 + 10dt + 5dt^2 - 5}{dt}$$

$$v(1) = 10 + 5dt$$

Newton dit alors que la vitesse en $t = 1$ s est de 10 m/s . Mais la vitesse est-elle exactement égale à 10 m/s ou d'environ 10 m/s ?

Si la vitesse est exactement de 10 m/s alors $dt = 0$ mais dans ce cas là, la notion de vitesse instantanée n'a aucun sens (dénominateur nul) et si la vitesse instantanée est d'environ 10 m/s comment calculer la vitesse exacte ?

Ce problème qui a opposé les mathématiciens ne sera résolu qu'au XIX^e siècle avec la notion de limite. Cependant si cette notion de limite est rigoureuse elle a malheureusement complexifiée le problème de départ. On écrira alors :

$$v(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{dz}{dt}$$

La vitesse en 1 est la limite quand t tend vers 1 de la variation de z , dz , sur la variation de temps dt .

2 Limite en un point

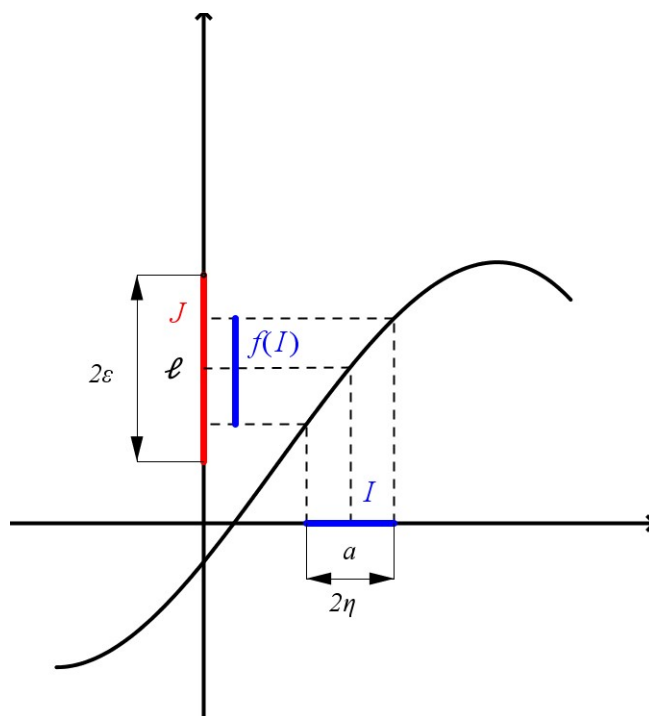
2.1 Définition

En première seule une approche est demandée pour la limite. Pour les puristes, nous donnerons la définition rigoureuse.

Définition 1 : On dit que la limite en a d'une fonction f est égale à ℓ si et seulement si pour tout intervalle ouvert J centré en ℓ on peut trouver un intervalle ouvert I centré en a pour lequel toutes les images de I par f soit dans J . On écrira alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

On peut alors faire le schéma suivant :



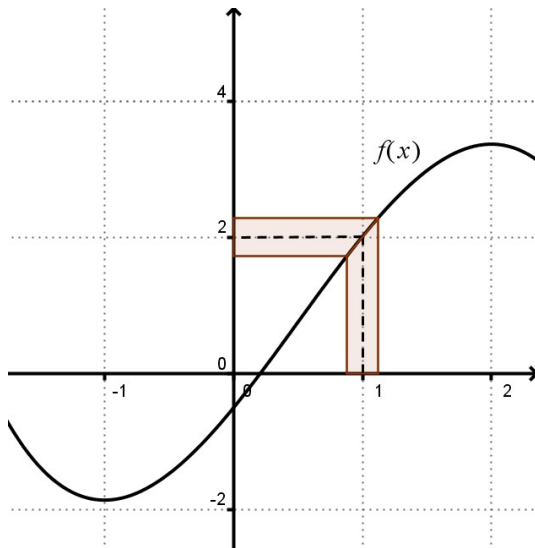
Plus x s'approche de a , sans l'atteindre, plus $f(x)$ s'approche de ℓ .

Voici la définition rigoureuse :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta, |x - a| < \eta \text{ et } x \neq a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

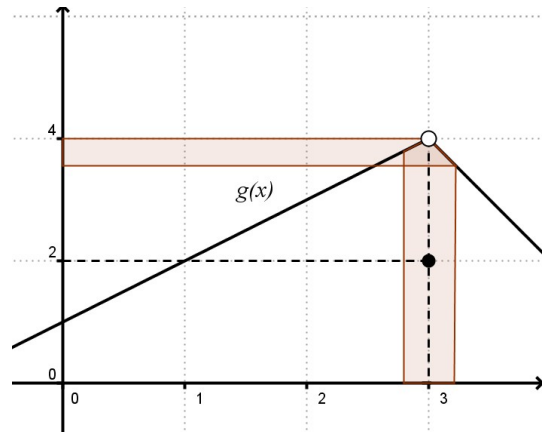
2.2 Exemples

Voici trois cas de limites :



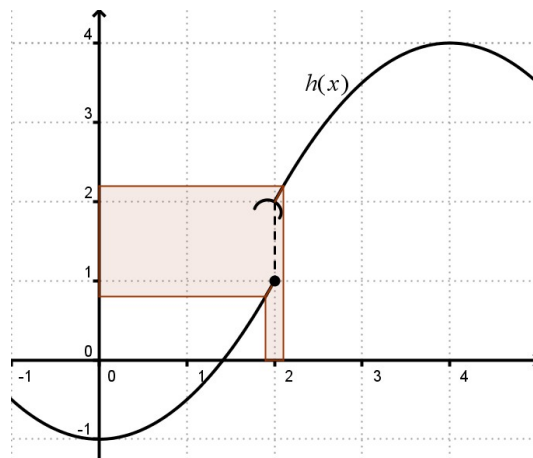
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

La fonction f est continue en 1 car
 $f(1) = 2$



$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 4$$

La fonction g n'est pas continue en 3
car $g(3) = 2$



La fonction h n'admet pas de limite en 2

2.3 Continuité

Définition 2 : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I . Soit a un élément de I .

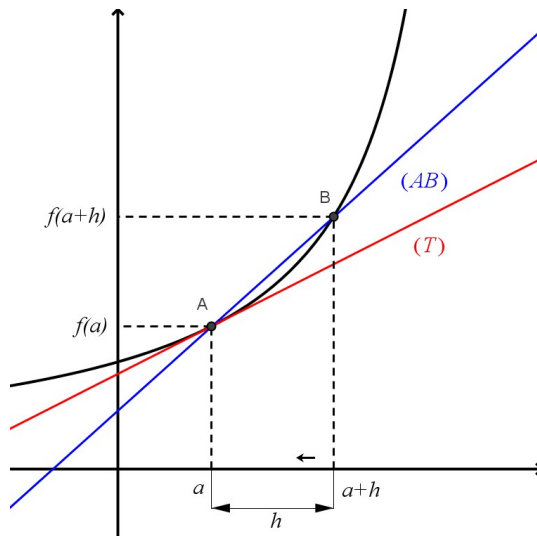
On dit que la fonction f est continue en a si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Remarque : D'une façon intuitive, on peut dire qu'une fonction est continue si "on peut tracer la courbe de f sans lever son crayon". C'est le cas du premier exemple. Ce n'est évidemment pas rigoureux !

3 Le nombre dérivé

3.1 Définition



Le coefficient directeur α de la droite (AB) est :

$$\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si le point B se rapproche du point A (h tend vers 0), la droite (AB) se rapproche de la tangente (T) à la courbe en $x = a$. Le coefficient directeur de cette tangente est appelé nombre dérivé noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition 3 : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I . On appelle nombre dérivé en a , le nombre noté $f'(a)$, si et seulement si le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite, c'est à dire :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou écrit autrement} \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarque :

⇒ On utilisera par la suite la première notation.

⇒ Les physicien utilise la notation appelée différentielle c'est à dire que :

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$$

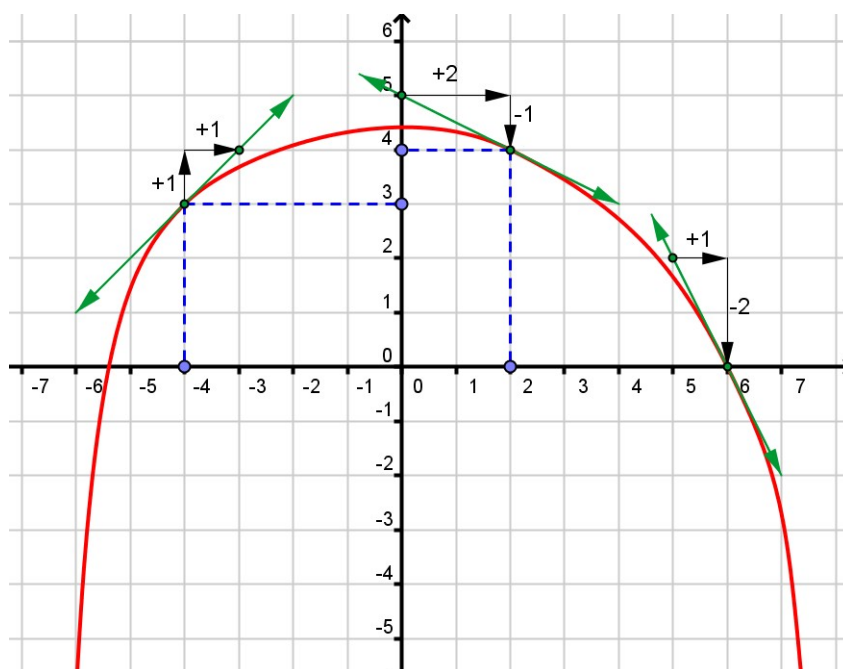
3.2 Exemples

Deux petits exemples graphiques pour montrer la signification du nombre dérivé.

Exemple 1

La courbe représentative f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. Lire, en vous servant du quadrillage les nombres suivants :

$$f(-4) \quad ; \quad f'(-4) \quad ; \quad f(2) \quad ; \quad f'(2) \quad ; \quad f(6) \quad \text{et} \quad f'(6)$$



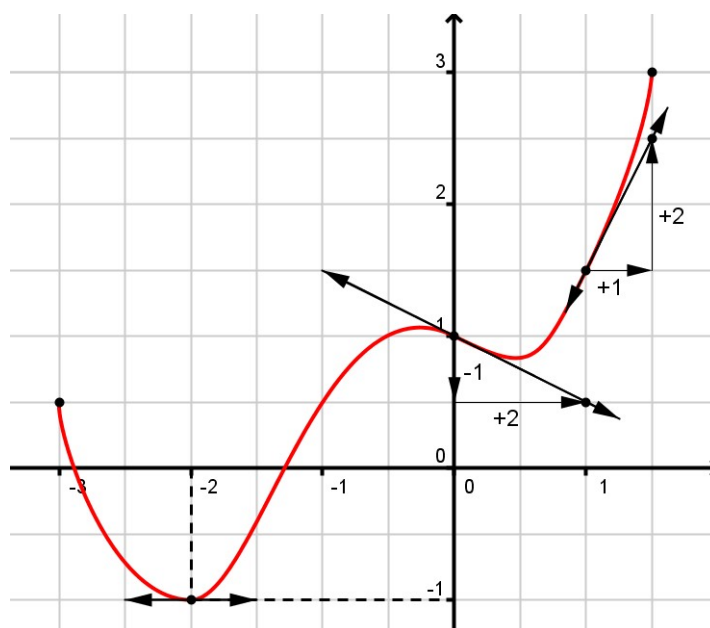
On lit les images et les nombres dérivés suivants :

$$\begin{cases} f(-4) = 3 \\ f'(-4) = \frac{1}{1} = 1 \end{cases} ; \begin{cases} f(-2) = 4 \\ f'(2) = \frac{-1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} f(6) = 0 \\ f'(6) = \frac{-2}{1} = -2 \end{cases}$$

Exemple 2

La courbe représentative g est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. Lire, en vous servant du quadrillage les nombres suivants :

$$g(-2) ; g'(-2) ; g(0) ; g'(0) ; g(1) \text{ et } g'(1)$$





On lit les images et les nombres dérivés suivants :

$$\begin{cases} g(-2) = -1 \\ g'(-2) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} g(1) = 1,5 \\ g'(1) = \frac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

4 Fonction dérivée. Dérivée des fonctions élémentaires

4.1 Définition

Définition 4 : Soit une fonction f définie sur D_f . Soit $D_{f'}$, l'ensemble pour lequel la fonction admet un nombre dérivé. On dit alors que la fonction f est dérivable sur $D_{f'}$. La fonction f' définie sur $D_{f'}$ qui à tout x associe son nombre dérivé est appelée fonction dérivée de f .

Remarque : Le but dans le paragraphe suivant sera de déterminer les fonctions dérivées des fonctions élémentaires puis d'établir des règles afin de pouvoir déterminer la dérivée d'une fonction quelconque.

4.2 Fonction dérivée des fonctions élémentaires

Pour se familiariser avec la définition du nombre dérivé, nous allons déterminer les dérivées des fonctions élémentaires.

4.2.1 Fonction affine

Soit f la fonction affine suivante : $f(x) = ax + b$

La fonction affine est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminons le taux d'accroissement en x :

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} \\ &= \frac{ah}{h} \\ &= a \end{aligned}$$

Si l'on passe à la limite :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a \\ &= a \end{aligned}$$

4.2.2 Fonction carrée

Soit f la fonction carrée suivante : $f(x) = x^2$

La fonction carrée est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminons le taux d'accroissement en x :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{h(2x + h)}{h} \\ &= 2x + h\end{aligned}$$

Si l'on passe à la limite :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h \\ &= 2x\end{aligned}$$

4.2.3 Fonction puissance

On admettra que la fonction f telle que : $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Exemple : Soit $f(x) = x^5$ on a alors $f'(x) = 5x^4$.

4.2.4 Fonction inverse

Soit f la fonction inverse suivante : $f(x) = \frac{1}{x}$

La fonction inverse est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminons le taux d'accroissement en x :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{\frac{x - x - h}{x(x+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{h \times x(x+h)} \\ &= \frac{-1}{x(x+h)}\end{aligned}$$

Si l'on passe à la limite :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

4.2.5 Fonction puissance inverse

On admettra que la fonction f telle que : $f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Exemple : Soit $f(x) = \frac{1}{x^4}$ on a alors $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$.

4.2.6 Fonction racine

Soit f la fonction carrée suivante : $f(x) = \sqrt{x}$

La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

 La fonction racine n'est pas dérivable en 0 bien qu'elle soit définie. Cela est dû au fait que la tangente en 0 est verticale et donc n'admet pas de coefficient directeur.

Déterminons le taux d'accroissement en x :

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Si l'on passe à la limite :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

4.3 Règles de dérivation

Dans toute la suite on considère deux fonctions u et v et un réel λ

4.3.1 Dérivée de la somme

On peut montrer facilement que la dérivée de la somme est la somme des dérivées car $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$

On a alors :

$$(u + v)' = u' + v'$$

Exemple : Soit la fonction f telle que :

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

en appliquant la règle de la somme :

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$$

4.3.2 Produit par un scalaire

On peut montrer facilement que la dérivée du produit par un scalaire est produit du scalaire par la dérivée car $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$

On a alors :

$$(\lambda u)' = \lambda u'$$

Exemple : Soit la fonction f telle que :

$$f(x) = 3x^4$$

en appliquant la règle de la somme :

$$f'(x) = 3(4x^3) = 12x^3$$

Exemple avec les règles 1 et 2 : Soit le polynôme P telle que :

$$P(x) = 5x^3 + 12x^2 - 7x + 3$$

En appliquant les deux règles :

$$P'(x) = 15x^2 + 24x - 7$$

4.3.3 Dérivée du produit

Tout d'abord, on a : $(uv)(x) = u(x)v(x)$

 La démonstration n'est pas au programme. Elle est donnée ici à titre indicatif.

Calculons le taux d'accroissement :

$$\frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

On retranche puis on ajoute un même terme

$$\begin{aligned}
 &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\
 &= \frac{v(x+h)(u(x+h) - u(x)) + u(x)(v(x+h) - v(x))}{h} \\
 &= v(x+h) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}
 \end{aligned}$$

On passe ensuite à la limite :

$$\begin{aligned}
 (uv)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[v(x+h) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
 &= v(x)u'(x) + u(x)v'(x)
 \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

 Attention la dérivée du produit n'est pas le produit des dérivées!!!

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x+1) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x+3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$$

4.3.4 Dérivée de l'inverse

Tout d'abord, on a : $\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = \frac{1}{u(x)^2}$

 La démonstration n'est pas au programme. Elle est donnée ici à titre indicatif.

Calculons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{1}{u(x+h)} - \frac{1}{u(x)}}{h} &= \frac{\frac{u(x) - u(x+h)}{u(x)u(x+h)}}{h} \\
 &= - \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \times \frac{1}{u(x+h)u(x)}
 \end{aligned}$$

On passe ensuite à la limite :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{u}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \times \frac{1}{u(x+h)u(x)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{u(x+h)u(x)} \\ &= -\frac{u'(x)}{u^2(x)}\end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\frac{1}{u} = -\frac{u'}{u^2}$$

Exemple : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

En appliquant la règle de l'inverse :

$$f'(x) = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

4.3.5 Dérivée du quotient

Ou d'abord, on a : $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

Pour trouver la dérivée du quotient, on cherche la dérivée du produit par l'inverse :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)'$$

D'après la règle du produit, on obtient

$$\begin{aligned}&= u' \frac{1}{v} + u \frac{-v'}{v^2} \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2}\end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + 1}$$

En appliquant la dérivée du quotient :

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x(2x + 5)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 - 10x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 10x + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

4.3.6 Dérivée de la puissance et de la racine

 On donne sans démonstration la dérivée de la puissance et de la racine.

$$(u^n)' = n u' u^{n-1} \quad \text{et} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Exemple : Soient les fonctions f et g définies et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3x - 5)^5 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

En appliquant les règles sur la dérivée de la puissance et de la racine, on a :

$$f'(x) = 5 \times 3(3x - 5)^4 = 15(3x - 5)^4 \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

4.4 Tableau récapitulatif

Voici le tableau des fonctions élémentaires que l'on vient de montrer ainsi que les fonctions trigonométriques cosinus, sinus et tangente.

Fonction	$\mathcal{D}_f$	Dérivée	$\mathcal{D}'_f$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

Voici maintenant les principales règle de dérivation. On a ajouté la dérivée de la composée qui n'est pas au programme.

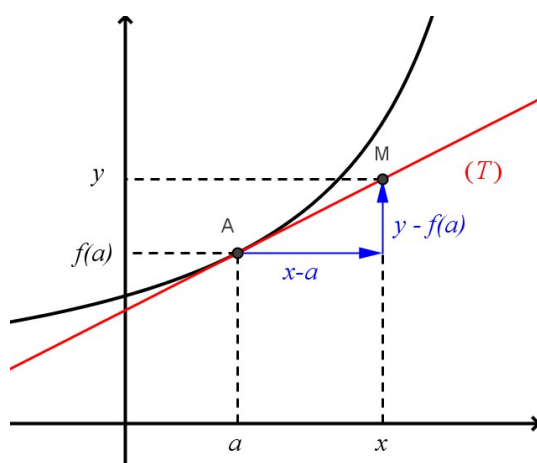
Dérivée de la somme	$(u + v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée d'une fonction composée	$(g \circ u)' = u' \times g' \circ u$

Conséquence Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

S Interprétation géométrique, numérique et cinématique

S.1 Équation de la tangente

Soit la courbe représentative d'une fonction f et sa tangente en $x = a$. On a alors le schéma suivant :



Le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé en a . Si on considère un point $M(x; y)$ quelconque de cette tangente, on obtient alors :

$$f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a}$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Théorème 1 : L'équation de la tangente en a à une courbe représentative d'une fonction f dérivable en a est égale à :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$$

Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

On détermine l'expression de la dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

On calcule ensuite :

$$\begin{cases} f'(2) = 3 \times 2^2 - 6 \times 2 + 3 = 12 - 12 + 3 = 3 \\ f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 4 = 8 - 12 + 6 + 4 = 6 \end{cases}$$

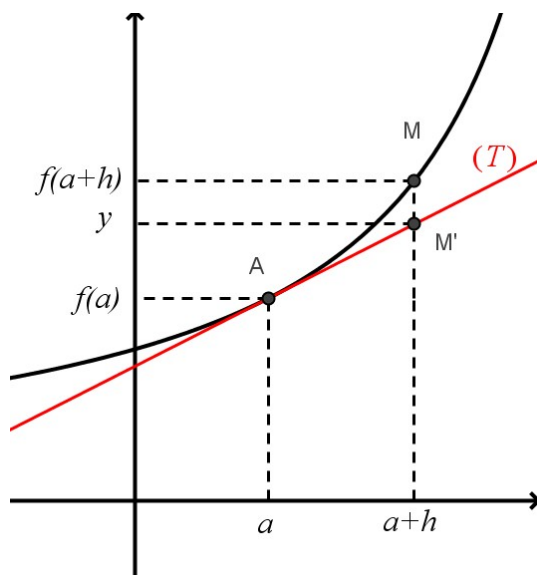
On obtient donc l'équation de la tangente suivante :

$$y = 3(x - 2) + 6$$

$$y = 3x - 6 + 6$$

$$y = 3x$$

5.2 Approximation affine



Lorsque x est proche de a , on peut confondre en première approximation le point M associé sur la courbe d'une fonction f avec le point M' d'abscisse x de la tangente à la courbe en a .

On pose $x = a + h$ avec h proche de 0.

Si on confond le point M avec le point M' , on a :

$$y \simeq f(a + h)$$

On obtient alors :

$$f(a + h) \simeq f(a) + h f'(a)$$

Exemple : Déterminer une approximation affine de $\sqrt{4,03}$.

On pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ et $h = 0,03$. On calcule alors la dérivée en 4.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{donc} \quad f'(4) = \frac{1}{4}$$

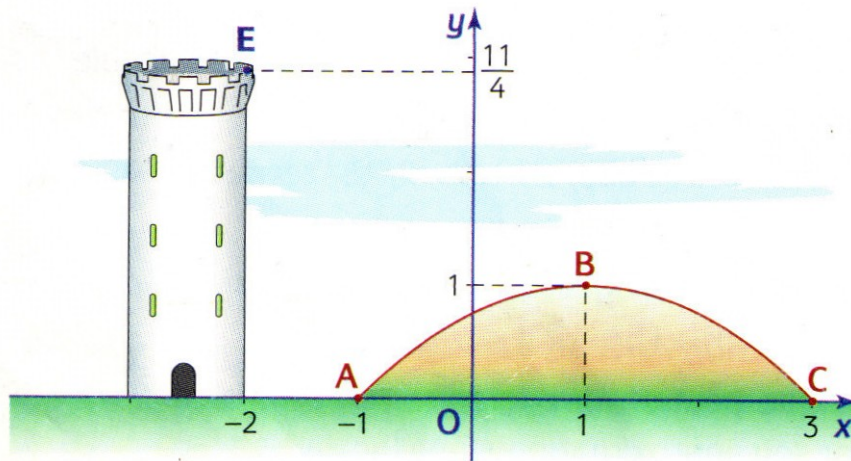
$$\text{et donc} \quad f(4,03) \approx f(4) + 0,03 \times \frac{1}{4} \approx 2,0075$$

On obtient donc : $\sqrt{4,03} \approx 2,0075$ à comparer à $\sqrt{4,03} \approx 2,007486$. La précision est donc de 10^{-4} .

5.3 Point de vue !

Sur la figure ci-dessous, "l'arc" de parabole ABC représente une colline, le sol est symbolisé par l'axe des abscisses. Un observateur est placé en E de coordonnée $\left(-2; \frac{11}{4}\right)$ dans le repère choisi.

Le but de cet exercice est de déterminer les point de la colline et ceux du sol (au-delà de la colline) qui ne sont pas visibles de point d'observation E .



- 1) On note f la fonction définie sur $[-1; 3]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer a, b, c pour que "l'arc" ABC soit la représentation de f .
- 2) a) Reproduire la figure et indiquer sur la figure les points de la colline et ceux du sol qui ne sont pas visible de E .
- b) Faire les calculs nécessaires pour trouver les abscisses de ces points.



- 1) La fonction f s'annule en -1 et 3 donc elle est de la forme :

$$f(x) = k(x + 1)(x - 3)$$

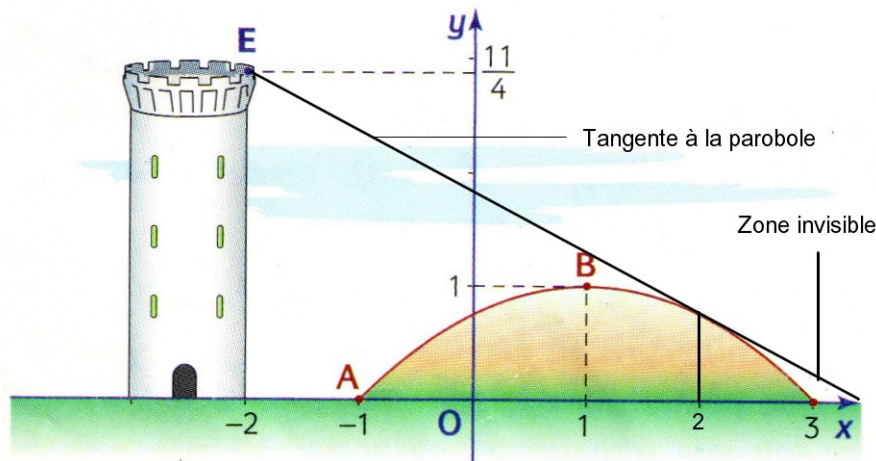
De plus on sait que $f(1) = 1$, donc :

$$-4k = 1 \quad \text{soit} \quad k = -\frac{1}{4}$$

On obtient donc :

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)(x - 3) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

- 2) a) On obtient le schéma suivant :



On trouve que les parties invisibles pour E sont situées entre les abscisses 2 et à peu près 3,5.

- b) Vérifions-le par le calcul. Il faut déterminer la tangente à la parabole qui passe par E .

L'équation de la tangente en $x = a$ est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Déterminons la dérivée de f : $f'(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

L'équation de la tangente est donc :

$$y = \left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right)(x - a) - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}$$

Le point E est sur la tangente, donc ses coordonnées doivent vérifier l'équation, en remplaçant, on obtient :

$$\frac{11}{4} = \left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right)(-2 - a) - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}$$

en multipliant par 4 et en retournant l'égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} (-2a + 2)(-2 - a) - a^2 + 2a + 3 &= 11 \\ 4a + 2a^2 - 4 - 2a - a^2 + 2a + 3 - 11 &= 0 \\ a^2 + 4a - 12 &= 0 \end{aligned}$$

$x = 2$ est racine évidente car $2^2 + 4 \times 2 - 12 = 4 + 8 - 12 = 0$

$P = -12$ donc l'autre racine est $x = -6$ non retenue.

L'autre point à déterminer est l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses. Ses coordonnées doivent vérifier, en remplaçant a par 2 :

$$0 = \left(-\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2}\right)(x - 2) - \frac{1}{4} \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{3}{4}$$

en retournant l'égalité :

$$-\frac{1}{2}(x-2) - 1 + 1 + \frac{3}{4} = 0$$

$$-\frac{1}{2}x + 1 + \frac{3}{4} = 0$$

on multiplie par 4

$$-2x + 7 = 0$$

$$x = \frac{7}{2}$$

On retrouve ainsi le résultat de la question 2a), la partie invisible se situe entre les abscisses 2 et 3,5.

5.4 Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement : position, vitesse, accélération d'un solide en physique.

Deux mobiles M_1 et M_2 sont sur l'axe des abscisses animé d'un mouvement dont les lois horaires (position en fonction du temps t) en fonction t sont respectivement

$$x_1(t) = 2t^2 + t + 4 \quad \text{et} \quad x_2 = -t^2 + 5t + 8$$

- 1) Calculer l'instant auquel les deux mobiles se rencontrent.
- 2) Calculer les vitesses respectives de ces deux mobiles à cet instant.
- 3) En déduire si lors de la rencontre, les deux mobiles se croisent ou si l'un dépasse l'autre.



- 1) Pour que les deux mobiles se rencontrent, il faut que leurs abscisses soient les mêmes. Soit donc à résoudre :

$$2t^2 + t + 4 = -t^2 + 5t + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3t^2 - 4t - 4 = 0$$

On calcule le discriminant : $\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2$

On obtient deux solutions :

$$t' = \frac{4+8}{6} = 2 \quad \text{ou} \quad t'' = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3}$$

On ne retient que la solution positive (on ne sait pas ce qui se passe avant $t = 0$). Les mobiles se rencontrent au bout de 2 secondes.

- 2) La vitesse est déterminée par la dérivée de la loi horaire. En dérivant, on obtient les vitesses des deux mobiles en fonction du temps :

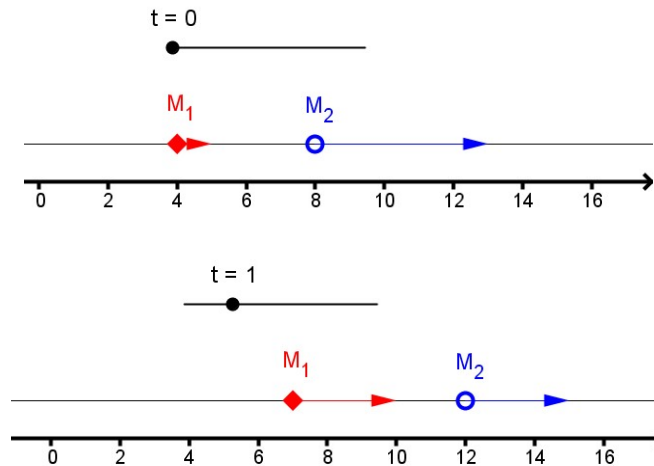
$$v_1(t) = 4t + 1 \quad \text{et} \quad v_2(t) = -2t + 5$$

Si au point de rencontre, les vitesses ont même signe, l'un des mobiles double l'autre, si les vitesses ont des signes opposés, les mobiles se croisent. Calculons les vitesses à $t = 2$.

$$v_1(2) = 9 \quad \text{et} \quad v_2(2) = 1$$

- 3) Les vitesses ont même signe, donc les mobiles se rencontrent, comme $v_1(2) > v_2(2)$, c'est le mobile 1 qui double le mobile 2.

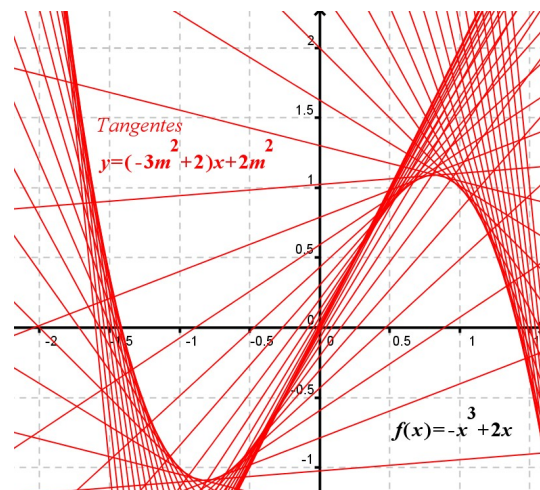
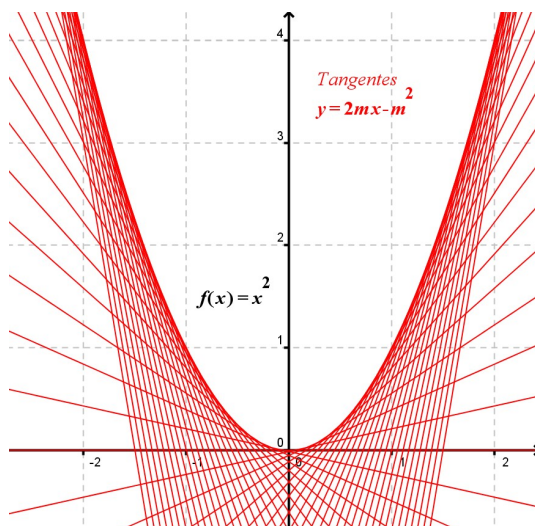
Remarque : Travail informatique : simuler(position et vitesse) des deux mobiles en fonction du temps avec "Géogébra". Par exemple ces deux moments à $t = 0$ et $t = 1$.

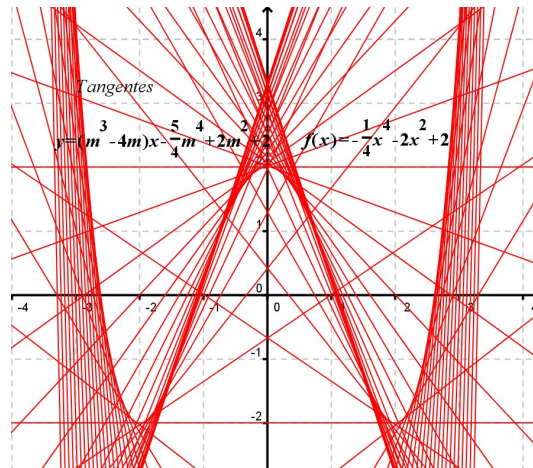


6 Sens de variation d'une fonction

6.1 Aperçu géométrique

Si l'on trace un certain nombre de tangentes à une courbe sans tracer celle-ci, on peut remarquer que la courbe apparaît en filigramme. Voici trois exemples réalisés avec "Géogébra" où m est un paramètre que l'on fait varier de façon à obtenir une famille de tangentes.





6.2 Sens de variation

On admettra le théorème suivant qui précise le lien entre variation et dérivée.

Théorème 2 : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

- ⇨ Si la fonction dérivée f' est **nulle**, alors la fonction est **constante**.
- ⇨ Si la fonction dérivée est **strictement positive** (sauf en quelques point isolé de I où elle s'annule), alors la fonction f est **strictement croissante** sur I .
- ⇨ Si la fonction dérivée est **strictement négative** (sauf en quelques point isolé de I où elle s'annule), alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I .

Exemple : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$$

Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.



On calcule la dérivée : $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2)$

On cherche les valeurs qui annule la dérivée :

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

Le signe de $f'(x)$ est celui d'un trinôme du second degré.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$f(x)$	$+\infty$		6		$-\infty$
		2			

6.3 Extremum d'une fonction

Théorème 3 : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

- ⇔ Si $c \in I$ est un extremum local de f sur I alors $f'(c) = 0$
- ⇔ Si $c \in I$, $f'(c) = 0$ et si f' change signe en c alors c est un extremum local de f sur I .

Exemple : Sur la fonction $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$, étudiée ci-dessus, la dérivée $f'(x) = 3x(-x + 2)$, s'annule et change de signe en 0 et 2. On en déduit que 0 et 2 sont des extremum de f , respectivement minimum et maximum.

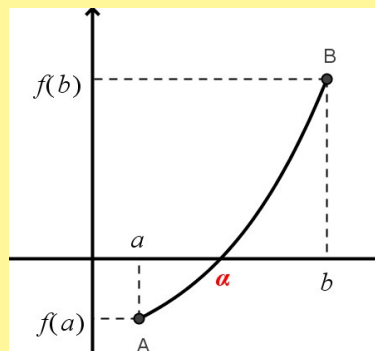
Remarque : Les extremum locaux d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée, mais si $f'(a) = 0$, a n'est pas nécessairement un extremum local. En effet, soit $f(x) = x^3$, sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 mais ne change pas de signe.

7 Théorème des valeurs intermédiaires

7.1 Le théorème

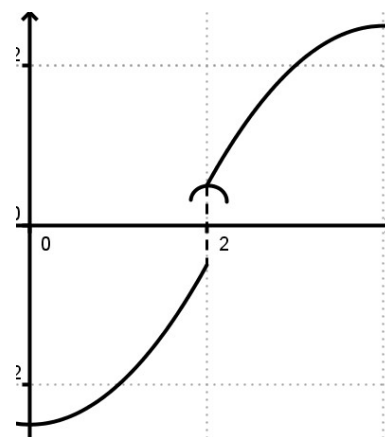
Théorème 4 : Soit une fonction f dérivable strictement monotone sur $I = [a; b]$.

Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$

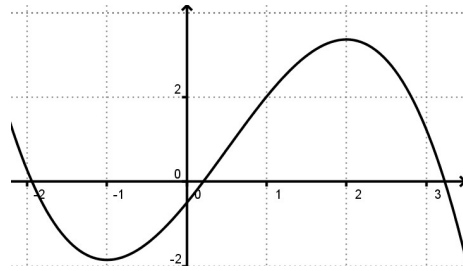


Analyse des hypothèses :

- ⇔ L'hypothèse que f soit dérivable, sert uniquement à la continuité de la fonction. La représentation ne doit pas avoir de rupture de courbe comme celle ci-contre.



⇔ L'hypothèse que f soit monotone permet d'avoir l'unicité de la solution. La courbe ci-contre n'est pas monotone et admet ainsi trois valeurs pour l'équation $f(x) = 0$.



⇔ Enfin la dernière hypothèse : $f(a)f(b) < 0$ permet d'affirmer que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

i On pourrait généraliser ce théorème à l'équation $f(x) = k$. Soit une fonction f dérivable et monotone sur $I = [a; b]$. Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution.

7.2 Application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[-1, 1]$.



La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

La fonction dérivée f' s'annule en $x = -1$ ou $x = 1$.

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+

on a de plus $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$ et $f(1) = 1^3 - 3 + 1 = -1$

Conclusion :

⇔ f est dérivable sur $[-1; 1]$.

⇔ $\forall x \in]-1; 1[$ $f'(x) < 0$ donc la fonction f est monotone sur $[-1; 1]$.

⇔ $f(-1)f(1) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α dans $[-1, 1]$ à l'équation : $x^3 - 3x + 1 = 0$

7.3 Valeur approchée d'une solution

Définition 5 : Soit une fonction f dérivable et monotone sur $I = [a; b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe un unique α tel que $f(\alpha) = 0$ avec $a < \alpha < b$

Pour encadrer α plus précisément, on applique l'algorithme suivant que l'on réitère autant que l'on veut :

⇔ On détermine $c = \frac{a+b}{2}$

⇔ Si $f(a)f(c) < 0$, on remplace l'intervalle $I = [a; b]$ par $I = [a, c]$

⇔ Si $f(a)f(c) > 0$, on remplace l'intervalle $I = [a; b]$ par $I = [c, b]$

Cet algorithme est appelé **dichotomie**.

Exemple : Appliquons cet algorithme à l'équation :

$$f(x) = 0 \quad \text{avec} \quad f(x) = x^3 - 3x + 1$$

On a vu dans le paragraphe précédent qu'il existe une unique solution α dans $[-1; 1]$ avec $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$.

⇔ On calcule : $c = \frac{-1+1}{2} = 0$

⇔ On calcule : $f(0) = 1$

⇔ On a alors $f(-1)f(0) > 0$, on remplace $I = [-1; 1]$ par $I_1 = [0, 1]$

⇔ On calcule : $c_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

⇔ On calcule : $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$

⇔ On a alors : $f(0)f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, on remplace $I_1 = [0, 1]$ par $I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

⇔ ...

On peut programmer cet algorithme avec le logiciel "Algobox", qui donne alors :

On entre une fonction F1.

On entre les deux valeurs a et b entre lesquelles la fonction change de signe.

On entre la précision (puissance de 10).

Le programme renvoie l'intervalle pour la précision demandée, ainsi de le nombre d'itérations et de l'écart entre les deux valeurs.




```

1  VARIABLES
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  b EST_DU_TYPE NOMBRE
4  c EST_DU_TYPE NOMBRE
5  i EST_DU_TYPE NOMBRE
6  E EST_DU_TYPE NOMBRE
7  n EST_DU_TYPE NOMBRE
8  DEBUT_ALGORITHME
9  AFFICHER "Borne inférieure"
10 LIRE a
11 AFFICHER a
12 AFFICHER "Borne supérieure"
13 LIRE b
14 AFFICHER b
15 AFFICHER "Précision puissance de 10"
16 LIRE n
17 AFFICHER "10^"
18 AFFICHER n
19 i PREND_LA_VALEUR 1
20 TANT_QUE (abs(F1(b)-F1(a))>pow(10,n)) FAIRE
21   DEBUT_TANT_QUE
22     c PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
23   SI (F1(a)*F1(c)<0) ALORS
24     DEBUT_SI
25       b PREND_LA_VALEUR c
26     FIN_SI
27   SINON
28     DEBUT_SINON
29       a PREND_LA_VALEUR c
30     FIN_SINON
31   i PREND_LA_VALEUR i+1
32   FIN_TANT_QUE
33 E PREND_LA_VALEUR abs(F1(b)-F1(a))
34 AFFICHER "valeur a : "
35 AFFICHER a
36 AFFICHER "valeur b : "
37 AFFICHER b
38 AFFICHER "|F1(b)-F1(a)| = "
39 AFFICHER E
40 AFFICHER "nombre d'itérations : "
41 AFFICHER i
42 FIN_ALGORITHME

```

Fonction numérique utilisée : $F1(x)=\text{pow}(x,3)-3*x+1$



Algobox répond alors pour : $a = -1$, $b = 1$, précision = 10^{-3}

```

***Algorithme lancé***
entrer la borne inférieure
-1
entrer la borne supérieure
1
entrer la précision en puissance de 10
précision 10^(-3)
valeur a : 0.34716797
valeur b : 0.34741211
|F1(b)-F1(a)| = 0.0006440842
nombre d'itérations : 14
***Algorithme terminé***

```

On obtient alors avec 14 itérations, l'encadrement suivant :

$$0,347\,1 < \alpha < 0,347\,4 \quad \text{soit} \quad \alpha \simeq 0,347$$

Malheureusement "Algobox" ne donne que 8 chiffres significatif, la précision maximum que l'on peut donner de la racine α est :

$$\alpha \simeq 0,347\,296\,36$$

7.4 Fonction auxiliaire

Exemple :

- 1) Démontrer que l'équation $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$
- 2) Exploiter les résultats de la question 1) pour résoudre les questions suivantes :

- a) Étudier sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ les variations de la fonction g définie par :
- $$g(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$
- b) Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies respectivement par :

$$f(x) = x(x-1) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

Étudier les positions relatives de ces deux courbes



- 1) On pose la fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

On a :

$$h'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

On a alors :

$$h'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

D'où le tableau de signes de la dérivée :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Sur $] -\infty; 1]$, la fonction admet donc comme maximum $h(0) = -1$. Donc sur $] -\infty; 1]$ l'équation $h(x) = 0$ n'admet pas de solution.

On calcule $h(1) = 2 - 3 - 1 = -2$ et $h(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 - 1 = 3$

Sur $]1; 2[$, la fonction h est dérivable, croissante ($h'(x) > 0$) et $h(1)h(2) < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α dans $]1; 2[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

Sur $[2; +\infty[$, la fonction h est croissante ($h'(x) > 0$) et $h(2) = 3$, donc l'équation $h(x) = 0$ n'admet pas de solution.

Conclusion : L'équation $h(x) = 0$ n'admet qu'une solution α sur $\mathbb{R}$ et $1 < \alpha < 2$. De plus :

⇔ Si $x < \alpha$, on a $h(x) < 0$

⇔ Si $x > \alpha$, on a $h(x) > 0$

2) a) On calcule la dérivée de la fonction g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} \\ &= \frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2} \\ &= \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} \\ &= \frac{h(x)}{(1+x^3)^2} \end{aligned}$$

On a alors : $\text{signe}(g'(x)) = \text{signe}(h(x))$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	-1	α	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(\alpha)$	0

b) Pour étudier la position des deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, il faut déterminer le signe de $f - g$.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x(x-1) - \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \\ &= x^2 - x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \\ &= \frac{2x^3 - 2x^2 - x^2 - 1}{2x} \\ &= \frac{h(x)}{2x} \end{aligned}$$

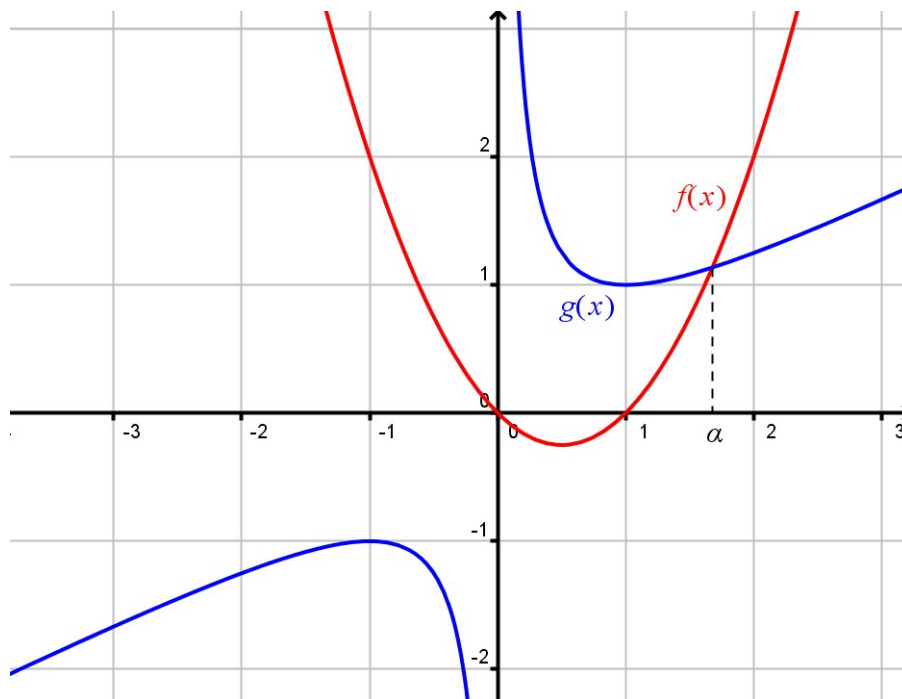
On dresse un tableau de signe :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$2x$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{h(x)}{2x}$	$+$	$ $	$-$	$+$

On en déduit que :

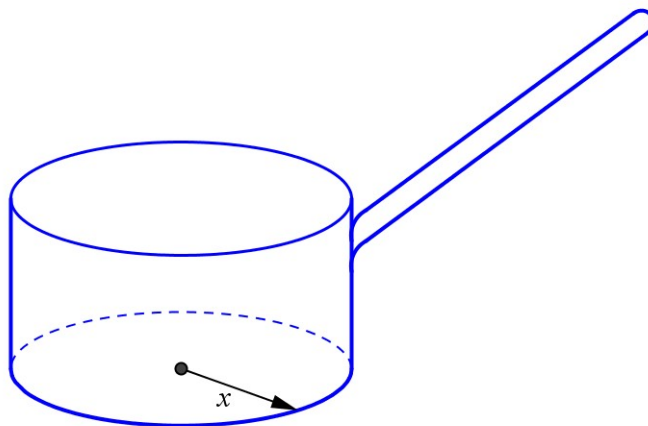
$\Rightarrow \mathcal{C}_1$ est au dessus de $\mathcal{C}_2$ pour $x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[$

$\Rightarrow \mathcal{C}_1$ est en dessous de $\mathcal{C}_2$ pour $x \in]0; \alpha[$



8 Problème d'optimisation

Pourquoi la hauteur d'une casserole est approximativement égale à son rayon quelque soit sa contenance ?



Pour répondre à cette question, on se propose de résoudre le problème suivant :

Comment fabriquer une casserole de volume v donné avec le moins de matière possible ?

On suppose que le prix de revient du manche ne dépend pas des dimensions de la casserole.

L'unité est le centimètre. On note x le rayon du cercle du fond, h la hauteur et $\mathcal{S}$ l'aire totale égale à l'aire latérale plus l'aire du fond.

- 1) a) Exprimer h en fonction de v et x
- b) Exprimer $\mathcal{S}$ en fonction de v et de x .

- 2) a) Étudier sur $]0; +\infty[$ les variations de la fonction f définie par $f(x) = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$
 b) En déduire la réponse à la question



- 1) a) Le volume v d'un cylindre de hauteur h et de rayon x a pour expression :

$$v = \pi x^2 \times h \Leftrightarrow h = \frac{v}{\pi x^2}$$

- b) La surface de métal correspond à l'aire latérale plus l'aire du fond, donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= (2\pi x)h + \pi x^2 \\ &= 2\pi x \times \frac{v}{\pi x^2} + \pi x^2 \\ &= \frac{2v}{x} + \pi x^2 \end{aligned}$$

- 2) a) On dérive la fonction f , on obtient alors :

$$f'(x) = -\frac{2v}{x^2} + 2\pi x = \frac{2\pi x^3 - 2v}{x^2}$$

On a alors :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{v}{\pi}$$

or on a : $v = \pi x^2 h$, en remplaçant :

$$x^3 = \frac{\pi x^2 h}{\pi} = x^2 h \Leftrightarrow x = h$$

Donc la dérivée s'annule pour $x = h$ et comme la fonction cube est croissante, avant h la dérivée est négative et positive après. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	h	$+\infty$
$f'(x)$		– 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(h)$	$+\infty$

- b) La surface de métal est donc minimum pour $x = h$, ce qui répond à notre question.