Devoir de mathématiques n°9 (DS) (16-02-2012)

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$. **(5 points)**

1) A l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe de f' en fonction de x ; puis en déduire le sens de variation de f.
2) Déterminer une équation de la tangente T_1, puis celle de $T_{-0,5}$ à la courbe aux points d'abscisses respectives 1 et $-0,5$.
3) Tracer les tangentes T_1 et $T_{-0,5}$ et la parabole représentant f en utilisant un repère orthonormé.
4) Déterminer le réel a tel que la tangente T_a au point d'abscisse a soit parallèle à la droite Δ d'équation : $y = -3x + 1$.
5) a) Ecrire l'équation de la tangente T_a, à la courbe au point d'abscisse a.
   b) En déduire la valeur de a telle que le point $A(0; -1)$ appartienne à T_a.

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)^3(4x+5)^2$. **(3 points)**

1) Sans développer, calculer $f'(x)$.
   Montrer que $f'(x) = (2x-1)^2(4x+5)(40x+22)$
2) a) Déterminer le tableau de variation de f.
   b) En déduire que f a des extremums (à préciser). On admettra que $f\left(-\dfrac{11}{20}\right) = -72{,}606\,24$.

III) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 1$. **(2,5 points)**

1) Calculer $f(x)$ et montrer que $f'(x)$ a même signe que x sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer le tableau de variation de f.
3) En déduire que, pour tout réel x : $f(x) \geqslant 1$; puis en déduire le signe de $f(x)$.

IV) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$ **(2,5 points)**

1) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R} - \{-2\}$; puis calculer $f'(x)$.
2) Déterminer une équation de la tangente T_{-1}, à la courbe au point d'abscisse -1

V) Le plan est muni d'un repère orthonormé. **(7 points)**
(la plupart des questions sont indépendantes)
Soient les points $A(1; 2)$, $B(-1; -3)$ et $C(5; -2)$. Soient I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AC]$.

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2) Déterminer les coordonnées du point I ; puis celles du point J.
3) Déterminer une équation de la droite d passant par A et parallèle à la droite (BC).
4) Déterminer une équation de la droite d' passant par les points A et I. Comment se nomme la droite d' ?

5) Montrer que, dans le triangle ABC, une équation de la médiane d'' issue de B est : $3x - 4y - 9 = 0$.
6) Soit la droite δ d'équation $-3x + 4y + 2 = 0$.
   Les droites d'' et δ sont-elles parallèles ? (préciser).
7) Déterminer les coordonnées du point D tel que : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.
8) Faire une figure.

VI) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x}}$ **(2 points bonus)**

1) Etudier la dérivabilité de f sur $]0; +\infty[$; dans ce cas, montrer que $f'(x)$ a le même signe que $(x - 3)$.
2) Déterminer le tableau de variation de f.
3) En déduire que f a un extremum sur $]0; +\infty[$.