Contrôle de mathématiques

Programmé le jeudi 12 décembre 2019
à rendre en devoir pour le lundi 6 janvier 2020

EXERCICE 1

Monotonie d'une suite **(2 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1}$

1) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{7}{(2n+3)(2n+1)}$.

2) Que peut-on dire de la monotonie de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$? Justifier.

EXERCICE 2

Suite arithmétique et suite géométrique **(5 points)**

1) La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
   On donne : $u_4 = -4$ et $u_7 = \dfrac{1}{2}$
   a) Déterminer la raison r et le premier terme u_0.
   b) Calculer u_{14}

2) Calculer la somme : $S = 700 + 694 + 688 + \cdots + 316 + 310$.
   On précisera la formule utilisée.

3) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme v_0.
   On donne : $v_2 = 9$ et $v_6 = 144$.
   a) Déterminer la raison q et le premier terme v_0.
   b) Calculer $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{11}$. On précisera la formule utilisée.

EXERCICE 3

Suite récurrente à deux termes **(2 points)**

Soit la suite définie sut $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n-1} + u_n \end{cases}$

1) Calculer les termes : u_2, u_3 et u_4.

2) On donne le programme récursif en Python suivant :

   Rentrer ce programme dans votre calculatrice puis donner $u(12)$

```python
def u(n):
    if n==0:
        return 3
    elif n==1:
        return 1
    return 2*u(n-1)+u(n-2)
```

EXERCICE 4

Suite arithmético-géométrique **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 1$.

On a tracé en annexe la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 1$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.

1) a) Sur le graphique en annexe, construire les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

   b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variations et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \dfrac{3}{2}$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison q et le premier terme v_0. En déduire les variations de (v_n) puis de (u_n).

   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   c) Déduire la monotonie de la suite puis la limite de la suite (u_n) en vous justifiant.

EXERCICE 5

Voyage en vélo **(6 points)**

Aurélien décide de faire, à vélo, Paris Stockholm d'une distance de 2 000 km. Il décide d'y aller progressivement. Le premier jour il parcourt 20 km et il décide de parcourir ensuite 5 km de plus que le jour précédent.
Pour déterminer le nombre de jours nécessaires à Aurélien, on utilise deux méthodes : une algorithmique et l'autre algébrique.

Partie A : méthode algorithmique

On donne le programme incomplet ci-contre.

1) Recopier puis compléter cet algorithme pour qu'il donne le résultat souhaité.
2) Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice et donner le résultat.

Entrées et initialisation
- $1 \to n$
- $20 \to u$
- $20 \to s$

Traitement
- **tant que** $s \ldots 2000$ **faire**
  - $n + \cdots \to n$
  - $u + \cdots \to u$
  - $s + \cdots \to s$
- **fin**

Sorties : Afficher ...

Partie B : méthode algébrique

On appelle (u_n) la suite qui au jour n associe le nombre de km u_n effectué par Aurélien. On a alors $u_1 = 20$.

1) Montrer que le suite (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison r.
2) Montrer que le nombre de jours n pour qu'Aurélien arrive à Stockholm vérifie :

$$n^2 + 7n - 800 = 0$$

3) Retrouver le résultat de la partie A.

Nom :

Prénom :

Annexe de l'exercice 4

(À rendre avec la copie)