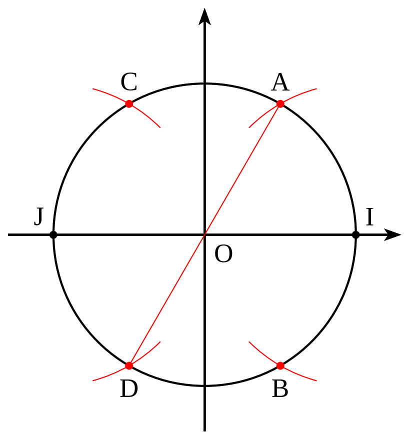
Correction devoir de mathématiques
Du 9 avril 2020

EXERCICE 1

Se repérer dans le cercle trigonométrique (3 points)

1) Le triangle OIA équilatéral. Le cercle de centre I et de rayon OI coupe le cercle trigo en A et B.



2) L'angle associé à B est :
$-\dfrac{\pi}{3}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$ et $\dfrac{5\pi}{3}$ dans $[0\,;\,2\pi]$

3) Le cercle de centre J et de rayon OI coupe le cercle trigo en C et D.
L'angle associé à C est :
$\dfrac{2\pi}{3}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$ et $\dfrac{2\pi}{3}$ dans $[0\,;\,2\pi]$

4) L'angle associé à D est :
$-\dfrac{2\pi}{3}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$ et $\dfrac{4\pi}{3}$ dans $[0\,;\,2\pi]$

EXERCICE 2

Lignes trigonométrique (3 points)

1) L'angle $-\dfrac{13\pi}{6}$ dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ correspond à $-\dfrac{\pi}{6}$.

$$\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{et}\quad\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

2) L'angle $\dfrac{91\pi}{4}$ dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ correspond à $\dfrac{3\pi}{4}$.

$$\cos\left(\frac{91\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{et}\quad\sin\left(\frac{91\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'angle $\dfrac{25\pi}{6}$ dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ correspond à $\dfrac{\pi}{6}$.

$$\cos\left(\frac{25\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{et}\quad\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

EXERCICE 3

Formules trigonométrique (2 points)

1) $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\dfrac{1+\cos(2x)}{2}=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

2) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\overset{\cos\frac{\pi}{8}>0}{\Longrightarrow}\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\overset{\sin\frac{\pi}{8}>0}{\Rightarrow}\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 4

Équations **(2 points)**

1) $2\cos x=1 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

2) $2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+2k\pi \end{cases}$

$\overset{\frac{7\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}\ \ k\in\mathbb{Z}$

Exercice 5

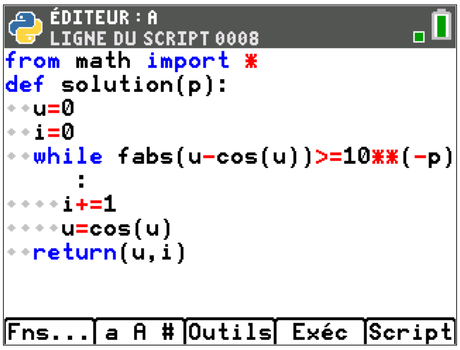
Approximation d'une équation **(2 points)**

1) La varaible p correspond à la précision de l'approximation à 10^{-p} près.
La variable i correspond au rang du terme de la suite à partir duquel cette précision est atteinte.

2) On obtient pour solution(4) :
$0,739\,130\ ,\ 23$.

ce qui correspond à $u\approx 0,739\,1$ à 10^{-4} près à partir du 23$^{\text{e}}$ terme.

3) $x\approx 0,739$ rd soit
$x\approx\dfrac{0,739\times 180}{\pi}\approx 42,342°$.



Exercice 6

Étude d'une fonction **(8 points)**

1) $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x+2\pi)=\dfrac{\cos(x+2\pi)}{3+\sin^2(x+2\pi)}=\dfrac{\cos x}{3+\sin^2 x}=f(x)$.
La fonction est 2π-périodique donc on obtient la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ à partir de $]-\pi\ ;\ \pi]$ par des translation de vecteur $\vec{u}=2k\pi\,\vec{\imath},\ k\in\mathbb{Z}$, sur l'axe des abscisses.

2) La fonction f est paire en effet :
$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{3+\sin^2(-x)}=f(x)=\dfrac{\cos x}{1+(-\sin x)^2}=\dfrac{\cos x}{3+\sin^2 x}=f(x)$.
Le plus petit intervalle d'étude de la fonction f est donc $[0\ ;\ \pi]$.

3) On dérive comme $\left(\dfrac{u}{v}\right)$ et on rappelle que $(\sin^2 x)' = 2\sin' x \sin x = 2\cos x \sin x$.

$$f'(x) = \frac{-\sin x(3+\sin^2 x) - \cos x(2\cos x \sin x)}{(3+\sin^2 x)^2} = \frac{\sin x(-3-\sin^2 x - 2\cos^2 x)}{(3+\sin^2 x)^2}$$

$$\overset{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}{=} \frac{\sin x(-3-\sin^2 x - 2 + 2\sin^2 x)}{(3+\sin^2 x)^2} = \frac{\sin x(\sin^2 x - 5)}{(3+\sin^2 x)^2}$$

4) On a : $\sin^2 x \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x - 5 \leqslant -4 < 0$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x(\sin^2 x - 5) = 0 \quad \overset{\sin^2 x - 5 \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \sin x = 0 \quad \overset{x \in [0;\pi]}{\Leftrightarrow} \quad x = 0$ ou $x = \pi$.

$\forall x \in [0\,;\,\pi]$, $\sin x \geqslant 0$ et $(\sin^2 x - 5) < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \leqslant 0$.

La fonction f est décroissante sur $[0\,;\,\pi]$.

5) On obtient le tableau de variation sur $[-\pi\,;\,\pi]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0		$+$		0		$-$		0
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	↗	0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{3}$

$$f(0) = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}$$

$$f(\pi) = \frac{-1}{3+0} = -\frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{3+1} = 0$$

La fonction f est donc bornée dans $\left[-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right]$

6) On obtient la courbe sur deux période : $[-\pi\,;\,3\pi]$. (signal quasi « triangulaire »).