# Correction devoir de mathématiques

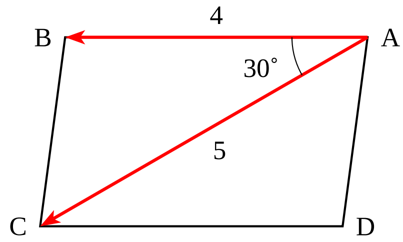
## A rendre pour le 7 mai 2020

## EXERCICE 1

**Définition** **(5 points)**

1) ABCD parallélogramme

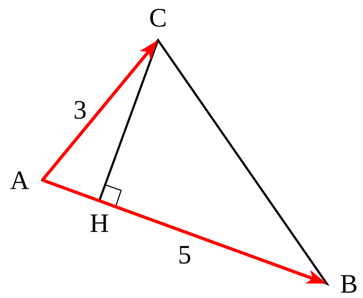
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos 30 = 10\sqrt{3}$




2) AH = 1

H projeté orthogonal de C sur (AB).

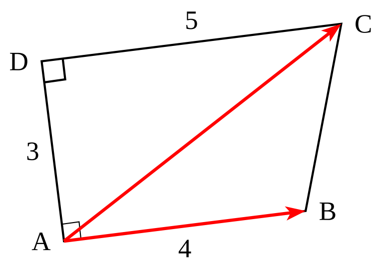
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 5$




3) ABCD est un trapèze rectangle

D projeté orthogonal de A sur (DC). Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ colinéaires de même sens (trapèze)

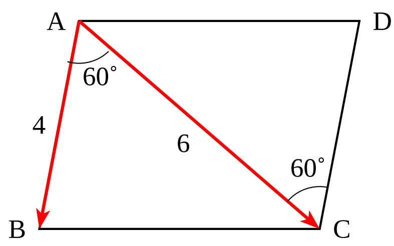
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB \times DC = 20$




4) ABCD est un parallélogramme

Les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{BAC}$ sont alternes internes donc égaux à 60°.

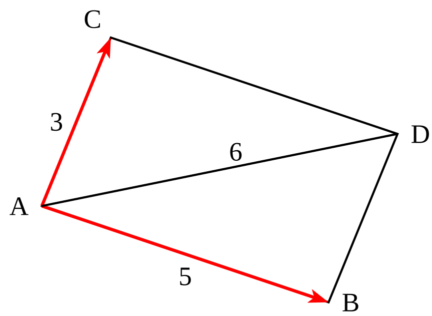
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC} = 12$




5) ABDC est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - AB^2 - AC^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}(36 - 25 - 9) = 1$$



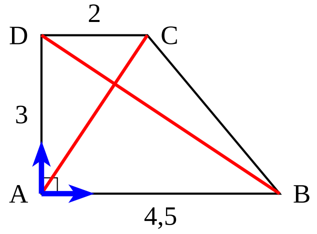
## EXERCICE 2

**Orthogonalité** **(5 points)**

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix} = (-6)(-3) + 2(-9) = 0$

   Le triangle ABC est rectangle en B.

2) Soit le repère $\left(A\,,\ \dfrac{1}{4,5}\overrightarrow{AB}\,,\ \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$




   On a alors B(4,5,0), C(2,3) et D(0,3)

   $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3 \end{pmatrix} = 2(-4,5) + 3(3) = 0.$

   Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux donc les diagonales (AC) et (BD) sont orthogonales.

3) Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales dans les cas suivants :

   a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} = 2(-7) + (-7)(-2) = -14 + 14 = 0$

   Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

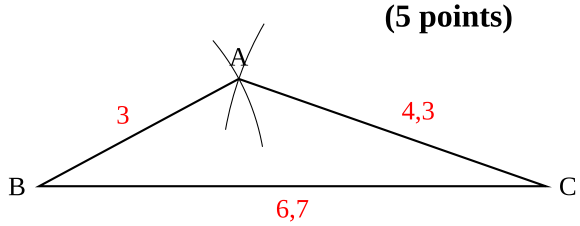
   b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix} = 5(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - 5(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 0$

   Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

## EXERCICE 3

**Relation d'Al Kashi** **(5 points)**

1) a) On a la construction suivante.




   b) D'après les formule d'Al Kashi, on a :

$$\cos\widehat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = -\frac{17,4}{25,8} = -\frac{29}{43} \text{ donc } \widehat{A} = \arccos\left(-\frac{29}{43}\right) \approx 132,4$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC} = \frac{35,4}{40,2} = -\frac{59}{67} \text{ donc } \widehat{A} = \arccos\left(\frac{59}{67}\right) \approx 28,3$$

2) Le triangle ABE est rectangle en E donc :

   $\sin 30 = \dfrac{BE}{AE} \Rightarrow BE = AE \sin 30 = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$ et $\cos 30 = \dfrac{AB}{AE} \Rightarrow AB = AE \cos 30 = 7$

   Dans le triangle ABD, d'après la relation d'Al kashi :

   $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos 30 = 79,25 - 38,5\sqrt{3}$

   La longueur $\ell$ du chemin E-B-D :

$$\ell = EB + BD = \frac{7}{\sqrt{3}} + \sqrt{79,25 - 38,5\sqrt{3}} \approx 7,6 \text{ cm}$$

## Exercice 4

**Ensemble de points** **(5 points)**

1) a) On pose H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
Comme le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} > 0$, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est dans le même sens que le vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 12 \quad \Leftrightarrow \quad AH \times AB = 12 \quad \Leftrightarrow \quad AH = \frac{12}{AB} = 2.$$

$\mathscr{D}$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H tel que AH = 2.

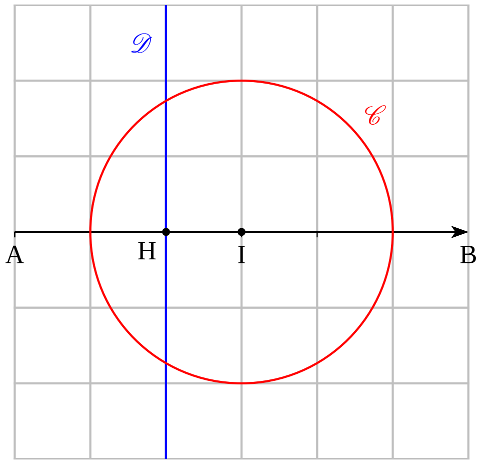
b) On introduit le point I, milieu de [AB]. On a alors $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM})(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}\underbrace{(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})}_{=\vec{0}} + IM^2 \\ &= -\frac{1}{4}AB^2 + IM^2\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -5 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}AB^2 + IM^2 = -5 \quad \Leftrightarrow \quad IM^2 = -5 + \frac{1}{4}AB^2 = 4 = 2^2$$

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et de rayon 2.

c) On obtient les ensembles suivants :




2) Soit ABC un triangle et I le milieu du segment [BC].

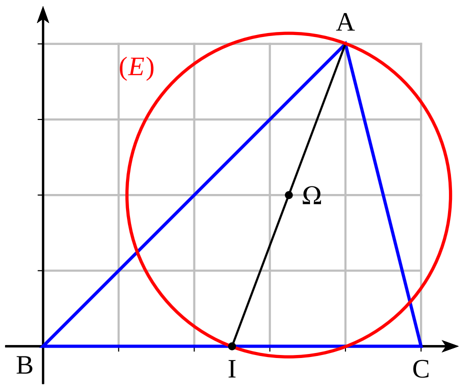
a) $$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) &= \overrightarrow{MA}(2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}) \\ &= 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI}.\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

L'ensemble ($E$) est le cercle de diamètre [AI].

b) On donne A(4 ; 4), B(0 ; 0) et C(5 ; 0). L'unité étant le cm.

On calcule les coordonnées de I et du centre Ω du cercle : $I\left(\frac{5}{2}\,;\,0\right)$ et $\Omega\left(\frac{13}{4}\,;\,2\right)$


A
(E)
Ω
B
I
C