Correction devoir de mathématiques

du lundi 4 janvier 2021

EXERCICE 1

Monotonie **(3 points)**

1) $u_0 = 3, \quad u_4 = \dfrac{11}{5} = 2,2, \quad u_{99} = \dfrac{201}{100} = 2,01.$

Conjecture : u_n tend vers 2 lorsque n devient très grand.

2) $$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{(2n+5)(n+1) - (2n+3)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$
$$= \frac{2n^2 + 2n + 5n + 5 - 2n^2 - 4n - 3n - 6}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1) > 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n < 0.$ La suite (u_n) est décroissante.

3) On obtient le programme suivant :

```python
def seuil(a):
    n=0
    while (2*n+3)/(n+1)>a:
        n=n+1
    return n
```

EXERCICE 2

Divers **(6 points)**

1) $S = 220 + 224 + 228 + \cdots + 1\,000.$

S est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 4 et de 1^er^ terme 220.

Nombre de termes : $\dfrac{1000 - 220}{4} + 1 = 196$

$$S = \text{Nbre de termes} \times \frac{\sum \text{termes extrêmes}}{2} = 196 \times \frac{220 + 1000}{2} = 119\,560.$$

2) a) $u_2 = q \times u_1 \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5\,304,5}{5\,150} = 1,03$

$u_1 = q \times u_0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = \dfrac{u_1}{q} = \dfrac{5\,150}{1,03} = 5\,000.$

b) $$S_{18} = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{Nbre de termes}}}{1 - q} = 5\,000 \times \frac{1 - 1,03^{19}}{-0,03} = \frac{500\,000(1,03^{19} - 1)}{3}$$
$\approx 125\,584,34$ au centième près.

3) a) Soit deux contre-exemples montrant que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

$u_1 = 1,05 \times 300 + 15 = 330$ et $u_2 = 1,05 \times 330 + 15 = 361,5$

- $u_1 - u_0 = 30$ et $u_2 - u_1 = 31,5$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ non arithmétique.

- $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{330}{300} = \dfrac{11}{10}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{361,5}{330} = \dfrac{241}{220}$ donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ non géométrique.

b) $v_{n+1} = u_{n+1} + 300 = 1,05u_n + 15 + 300 = 1,05u_n + 315 = 1,05\left(u_n - \dfrac{315}{1,05}\right)$
$= 1,05(u_n + 300) = 1,05v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1,05$, la suite v_n) est géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme $v_0 = 300 + 300 = 600$.

c) $v_n = v_0 \times q^n = 600 \times 1,05^n$ d'où $u_n = v_n - 300 = 600 \times 1,05^n - 300$.

Exercice 3

Plaques de verre teintées **(6 points)**

1) En traversant la première plaque, l'intensité perd 20 % de son intensité :
$$I_1 = I_0 - 0,2I_0 = 0,8I_0 = 0,8 \times 400 = 320$$

2) a) De I_{n+1} à I_n, la rayon traverse une plaque supplémentaire d'où :
$$I_{n+1} = I_n - 0,2I_n = 0,8I_n$$
b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 0,8$, la suite (I_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $I_0 = 400$.

c) $I_n = I_0 \times q^n = 400 \times 0,8^n$.

3) a) Si le rayon a perdu au moins 70 % de son intensité, il lui en reste moins de 30 % d'où $J = 0,3 \times 400 = 120$.

b) nombrePlaque(120) renvoie $n = 6$.
Il faut 6 plaques pour que la rayon perde au moins 70 % de son intensité.

Exercice 4

Carrelage **(5 points)**

1) Pour u_2, on compte les carreaux grisés : $u_2 = 12$.
Pour u_3, on poursuit le remplissage, on trouve : $u_3 = 18$.

2) a) Pour déterminer la raison, on calcule la différence entre deux termes consécutifs :
$$r = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = 6$$
b) Comme la suite commence à u_1 : $u_n = u_1 + (n-1)r = 6 + 6(n-1) = 6n$

3) À l'étape 5, on a ajouté : $u_5 = 6 \times 5 = 30$ carreaux. On a alors posé
$$1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_5 = 1 + 6(1 + 2 + \cdots + 5) = 1 + 6 \times \frac{5 \times 6}{2} = 91 \text{ carreaux.}$$

4) On rappelle que : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 6(1 + 2 + \cdots + n) = 6 \times \dfrac{n(n+1)}{2} = 3n(n+1) = 3n^2 + 3n$.

5) On doit avoir :

$C_n = 2\,977 \Leftrightarrow 1 + 3n^2 + 3n = 2977 \Leftrightarrow 3n^2 + 3n - 2976 \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} n^2 + n - 992 = 0$

$\Delta = 1 + 4 \times 992 = 3\,969 = 63^2$. La solution positive est : $n = \dfrac{-1 + 63}{2} = 31$.

L'artisan a donc fait 31 étapes en posant 2 977 carreaux.