Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 04 février 2021

Exercice 1

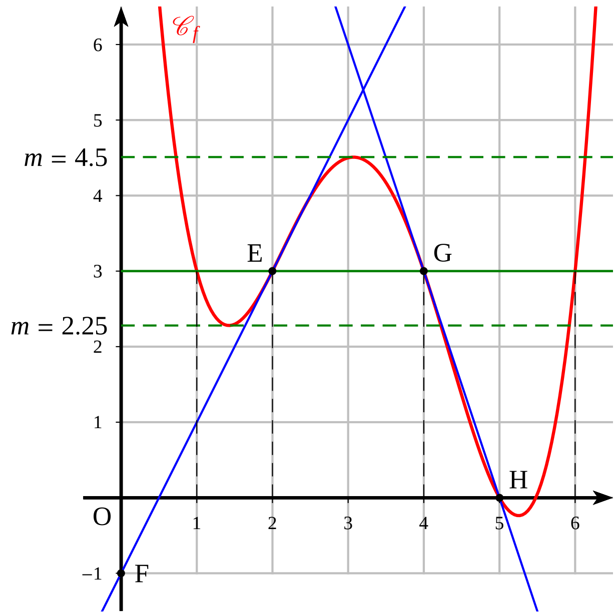
Représentation graphique **(5 points)**

1) $f(2) = 3$, $f'(2) = 2$, $f(4) = 3$ et $f'(4) = -3$.

2) a) Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$, on trace la droite horizontale d'équation $y = 3$, puis on cherche les abscisses des points d'intersection entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite.

b) On obtient quatre solutions pour l'équation $f(x) = 3$: $S = \{1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$

c) Pour que l'équation $f(x) = m$ admette quatre solutions, la droite horizontale d'équation $y = m$ doit couper quatre fois la courbe $\mathscr{C}_f$.
Ceci n'est possible que si $m \in]2,25\ ;\ 4,5[$



3) On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1.5		3		5.25		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2,25	↗	4,5	↘	0,25	↗	$+\infty$

Exercice 2

Fonction polynôme **(7 points)**

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x^2 - 8x + 12)$.

2) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 12 = 0 \quad \overset{\Delta=64-48=16=4^2}{\Leftrightarrow} \quad x_1 = \dfrac{8+4}{2} = 6$ ou $x_2 = \dfrac{8-4}{2} = 2$

signe de $f'(x)$ = signe de $x^2 - 8x + 12$.

On obtient le tableau de variation suivant :

$f(0) = 0$
$f(2) = 8 - 48 + 72 = 32$
$f(6) = 216 - 12 \times 36 + 36 \times 6 = 0$
$f(8) = 512 - 12 \times 64 + 36 \times 8 = 32$

x	0		2		6		8
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$	32

3) (T_4) : $y = f'(4)(x-4) + f(4)$

$f(4) = 64 - 192 + 144 = 16$ et $f'(4) = 3(16 - 32 + 12) = -12$.

On obtient alors : (T_4) : $y = -12(x-4) + 16 \quad \Leftrightarrow \quad y = -12x + 64$.

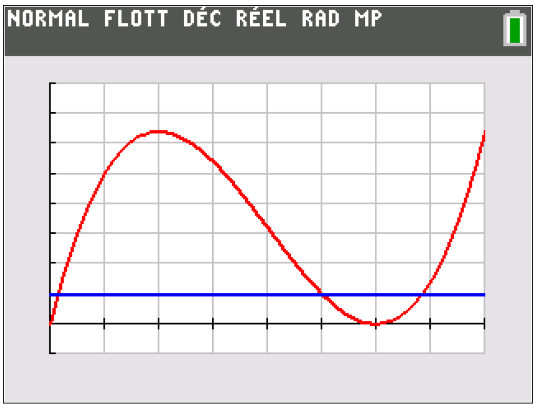
4) $f(x) - (-12x + 64) = x^3 - 12x^2 + 36x + 12x - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

$$\begin{aligned}(x-4)^3 &= (x-4)^2(x-4) = (x^2 - 8x + 16)(x-4) = x^3 - 4x^2 - 8x^2 + 32x + 16x - 64 \\ &= x^3 - 12x^2 + 48x - 64\end{aligned}.$$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$.

On en déduit que le signe de $f(x) - (-12x + 64)$ est celui de $(x - 4)$ et donc que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de (T_4) si $x < 4$ et au dessus si $x > 4$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en $x = 4$.

5) On obtient :



On trace la droite horizontale d'équation $y = 5$ puis on cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont sur ou au dessus de la droite d'équation $y = 5$.

On l'aide de la fonction « intersection » de la calculatrice, on trouve :

$$S = [0,146\ ;\ 5,000] \cup [6,854\ ;\ 8,000].$$

Exercice 3

Calcul de dérivées **(8 points)**

1) $f(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 6x - 5$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x^2 - 3x + 2)$.

2) $f(x) = \cos x + 1 + \dfrac{4}{x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\sin x - \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{-(x^3 \sin x + 8)}{x^3}$.

3) $f(x) = \sqrt{3x-2}$ dérivable si $3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{3}$ donc sur $\left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

On a alors : $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

4) $f(x) = \dfrac{7}{4-x^2} = \dfrac{7}{(x-2)(x+2)}$ dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\,;\,2\}$

On a alors $f'(x) = \dfrac{-7(-2x)}{(4-x^2)^2} = \dfrac{14x}{(4-x^2)^2}$.

5) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x^2+2x} = \dfrac{2x-5}{x(x+2)}$ dérivable sur $\mathbb{R}^* - \{-2\}$.

On a alors : $f'(x) = \dfrac{2(x^2+2x) - (2x+2)(2x-5)}{(x^2+2x)^2} = \dfrac{2x^2 + 4x - 4x^2 + 10x - 4x + 10}{(x^2+2x)^2}$

$$= \dfrac{2(-x^2+5x+5)}{(x^2+2x)^2}$$

6) $f(x) = (3x-1)\sqrt{1-2x}$ dérivable si $1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$ donc sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$

On a alors : $f'(x) = 3\sqrt{1-2x} + (3x-1) \times \dfrac{-2}{2\sqrt{1-2x}} = \dfrac{3-6x-3x+1}{\sqrt{1-2x}} = \dfrac{-9x+4}{\sqrt{1-2x}}$

7) $f(x) = (x^2+5x-1)^4$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4(2x+5)(x^2+5x-1)^3$.