Devoir de mathématiques

A rendre pour le lundi 1er mars 2021

EXERCICE 1

Etude d'une fonction **(5 points)**

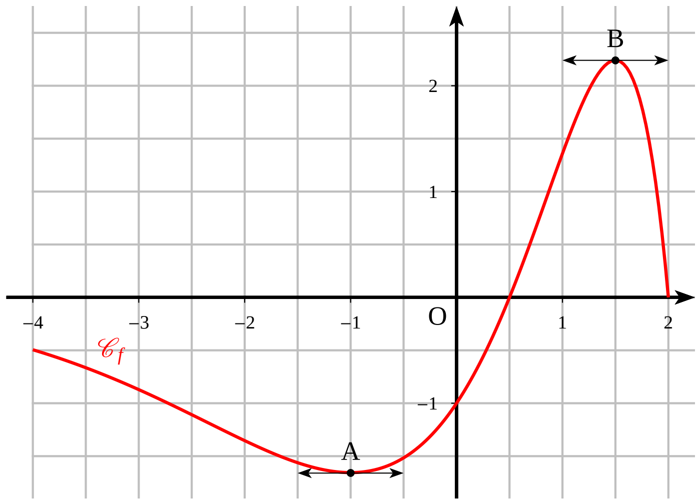
Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

1) Déterminer les coordonnées du point A, point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
2) La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.
3) Déterminer la fonction dérivée f'.
4) Résoudre $f'(x) = 0$ et déterminer le signe de $f'(x)$.
   Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.
5) On note (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1,6. La tangente (T) passe-telle par l'origine du repère ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Représentation graphique et fonction **(5 points)**

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,2]$ dont on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.



1) Résoudre graphiquement $f'(x) = 0$ et $f'(x) \leqslant 0$. Justifier.
2) On admet que la fonction f est définie par : $f(x) = (-x^2 + 2,5x - 1)e^x$.
   a) Déterminer la fonction dérivée f'.
   b) Étudier le signe de la fonction f' sur $[-4\,;\,2]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-4\,;\,2]$.
   c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 3

Pièces en acier **(5 points)**

Une entreprise fabrique des pièces en acier, toutes identiques, pour l'industrie aéronautique. Ces pièces sont coulées dans des moules à la sortie du four. Elles sont stockées dans un entrepôt dont la température ambiante est maintenue à 25°.

Ces pièces peuvent être modelées dès que leur température devient inférieure ou égale à 600°et on peut les travailler tant que leur température reste supérieure ou égale à 500°.

On admet que la température en degré Celsius de ces pièces peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = 1\,375e^{-0{,}075t} + 25$,
où t correspond au temps, exprimé en heures, mesuré après la sortie du four.

1) Calculer la température des pièces à la sortie du four.
2) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?
3) Les pièces peuvent-elles être modelées 10 heures après la sortie du four ? Après 14 heures ?
4) On souhaite déterminer le temps minimum d'attente en heures après la sortie du four avant de pouvoir modeler les pièces.
   a) Recopier et compléter l'algorithme donné ci-dessous pour qu'il renvoie ce temps minimum d'attente en heure (arrondi par excès à 0,1 près).

```
from math import*
def f(t):
    return 1375*exp(-0.075*t)+25
def seuil():
    t=...
    temperature=...
    while temperature >=......:
        t=t+0.01
        temperature=......
    return t
```

   b) Déterminer ce temps minimum d'attente à l'aide de cet algorithme.
      On arrondira au dixième.

EXERCICE 4

Étude d'une fonction par une fonction auxiliaire **(5 points)**

Soit g la fonction définie sur $[-5\,;\,5]$ par : $g(x) = e^x - x + 1$.

1) Déterminer la fonction dérivée g'.
2) Étudier les variations de la fonction g sur $[-5\,;\,5]$.
3) Démontrer que : $\forall x \in [-5\,;\,5],\ \ g(x) > 0$.
4) Soit f la fonction définie sur $[-5\,;\,5]$ par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x}$
   a) Démontrer que : $\forall x \in [-5\,;\,5],\ \ f'(x) = \dfrac{1}{e^x} \times g(x)$.
      En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$.
   b) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.