Correction devoir de mathématiques

Du lundi 1er mars 2021

EXERCICE 1

Etude d'une fonction **(5 points)**

1) $A(0\ f(0)) = \left(0\ ;\ \dfrac{e^0}{0+1}\right) = (0\ ;\ 1)$ intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

2) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{e^x}{x+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 0$ impossible.
La courbe $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

3) f est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$.
$f'(x) = \dfrac{e^x(x+1) - 1e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{e^x(x+1-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$.

4) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xe^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^x > 0$.
Le signe de $f'(x)$ est du signe de x.

Pour connaître la limite en $+\infty$.
On teste avec la calculatrice en rentrant :
$Y_1 = e^x/(x+1),\ \ Y_1(100) \approx 2,66 \times 10^{41}$
La fonction f tend vers $+\infty$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

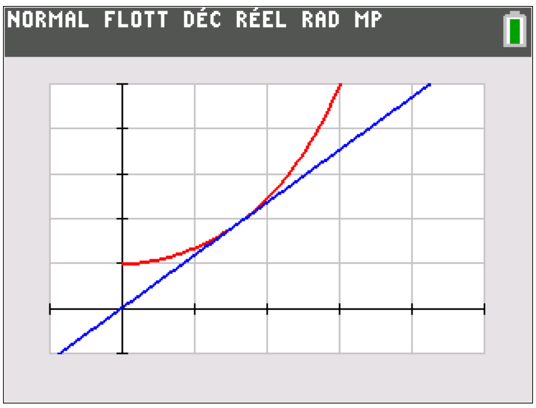
5) La tangente (T) passe par l'origine si $y(0) = 0$.

(T) : $y = f'(1,6)(x - 1,6) + f(1,6) \quad \Rightarrow \quad y(0) = f'(1,6) \times 1,6 + f(1,6)$

or $f(1,6) = \dfrac{e^{1,6}}{2,6}$ et $f'(1,6)) = \dfrac{1,6\,e^{1,6}}{2,6^2}$ donc

$$y(0) = -\frac{1,6^2 e^{1,6}}{2,6^2} + \frac{e^{1,6}}{2,6} = \frac{e^{1,6}(-2,56+2,6)}{2,6^2} \quad \Leftrightarrow \quad y(0) = \frac{0,04e^{1.6}}{2.6^2} \neq 0 \quad (\approx 0,03).$$

La tangente (T) ne passe pas par l'origine du repère.



EXERCICE 2

Représentation graphique et fonction **(5 points)**

1) Graphiquement, pour $f'(x) = 0$, on repère les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui admettent des tangentes horizontales : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1,5$
et pour $f'(x) \leqslant 0$, les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$, où la fonction est décroissante : $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-4\,;-1] \cup [1,5\,;\,2]$.

2) a) $f'(x) = (-2x + 2,5)e^x + (-x^2 + 2,5x - 1)e^x = e^x(-2x + 2,5 - x^2 + 2,5x - 1)$
$= e^x(-x^2 + 0,5x + 1,5)$.

b) Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$ on a $x_1 = -1$ racine évidente.
$P = -1,5$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = 1,5$
Signe de $f'(x)$ = signe de $(-x^2 + 0,5x + 1,5)$.

x	-4		-1		$1,5$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-27e^{-4}$	↘	$-4,5e^{-1}$	↗	$0,5e^{1,5}$	↘	0

$f(-4) = -27e^{-4} \approx -0,49$, $f(-1) = -4,5e^{-1} \approx -1,66$, $f(1,5) = 0,5e^{1,5} \approx 2,24$, et $f(2) = 0$.

c) $T_{\frac{1}{2}}\ :\ y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$. on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$.

$T_{\frac{1}{2}}\ :\ y = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{3e^{\frac{1}{2}}}{2}x - \frac{3}{4}e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = 1,5e^{0,5}x + 0,75e^{0,5}$.

Comme $e^{0,5} = \sqrt{e}$ on a : $T_{\frac{1}{2}}\ :\ y = 1,5\sqrt{e}\,x + 0,75\sqrt{e}$.

EXERCICE 3

Pièces en acier **(5 points)**

1) À la sortie du four, la température vaut : $f(0) = 1\,375 + 25 = 1\,400$°C.

2) $f'(x) = 1\,375(-0,075)\,e^{-0,075t} = -103,125\,e^{-0,075t}$.
$\forall t \in [0\,;+\infty[,\ e^{-0,075t} > 0 \Rightarrow f'(t) < 0$.
La fonction f est décroissante, ce qui dans le contexte de l'énoncé est cohérent, car $f(t)$ mesure la température des pièces à la sortie du four qui donc refroidissent.

3) $f(10) = 1\,375\,e^{-0,75} + 25 \approx 674,5 > 600$.
Les pièces ne peuvent pas encore être modelées après 10 h.
$f(14) = 1\,375\,e^{-1,05} + 25 \approx 506,16 \Rightarrow 500 \leqslant f(14) \leqslant 600$.
Les pièces peuvent être modelées après 14 h.

4) a) On obtient l'algorithme suivant :

```
from math import*
def f(t):
    return 1375*exp(-0.075*t)+25
def seuil():
    t=0
    temperature=1400
    while temperature >=600:
        t=t+0.01
        temperature=f(t)
    return t
```

b) L'algorithme retourne : $t = 11,63$.
Au dixième, le temps d'attente minimum est 11,6 h = 11 h 36 minutes.

Exercice 4

Étude d'une fonction par une fonction auxiliaire **(5 points)**

Soit g la fonction définie sur $[-5 ; 5]$ par : $g(x) = e^x - x + 1$.

1) $g'(x) = e^x - 1$.

2) $g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$.

Comme la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$, si $x > 0$ alors $g'(x) > 0$ sinon $g'(x) < 0$.

$g(-5) = e^{-5} + 5 + 1 = e^{-5} + 6 \approx 6,0$
$g(0) = e^0 - 0 + 1 = 2$
$g(5) = e^5 - 5 + 1 = e^5 - 4 \approx 144,4$

x	-5		0		5
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g(-5)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$g(5)$

3) D'après le tableau de variation : $\forall x \in [-5 ; 5], \quad g(x) \geqslant 2 > 0$.

4) a) $f'(x) = 1 + \dfrac{1e^x - x\,e^x}{(e^x)^2} = 1 + \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = 1 + \dfrac{1-x}{e^x} = \dfrac{e^x - x + 1}{e^x} = \dfrac{1}{e^x} \times g(x)$.

$\forall x \in [-5;5], \quad e^x > 0$ et $g(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0$.

La fonction f est croissante sur $[-5;5]$.

b) $\mathrm{T}_0 : \; y = f'(0)\,x + f(0)$ or $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{1}{e^0} \times g(0) = 2$ donc :

$\mathrm{T}_0 : \; y = 2x + 1$