Correction contrôle de mathématiques
Du jeudi 01 avril 2021

EXERCICE 1

Alignement **(4 points)**

1) $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

2) a) $I\left(0\,;\,\frac{2}{3}\right)$, $J\left(\frac{3}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$, $K\left(\frac{6}{5}\,;\,0\right)$.

b) $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{3}{4}\,;\,\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{4}\,;\,-\frac{5}{12}\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(\frac{6}{5}\,;\,-\frac{2}{3}\right)$.

$\det(\overrightarrow{IJ}\,,\,\overrightarrow{IK}) = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{6}{5} \\ -\frac{5}{12} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{6}{5} \times \frac{5}{12} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires et donc les points I, J et K sont alignés.

EXERCICE 2

Produits scalaires **(5 points)**

1) a) On projette orthogonalement A sur (BC).

Comme les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de même sens, on a :

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \times BC = 4(4+5) = 36.$

b) On projette orthogonalement B sur (AH) et on applique le théorème de Pythagore :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} = AH^2 = AB^2 - BH^2 = 36 - 16 = 20$

2) a) Comme $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$

b) Comme les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de sens contraires, on a :

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = -CD \times AB = -7 \times 5 = -35.$

c) A se projette orthogonalement en D sur (CD), d'où :

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} = CD^2 = 49$

EXERCICE 3

Éclairage **(4 points)**

1) $B(24\,;\,35)$, $K(12\,;\,35)$ et $L\left(24\,;\,\frac{35}{5}\right) = (24\,;\,7)$.

2) Aire(OAK) $= \dfrac{1}{2} \times \text{OA} \times \text{AK} = \dfrac{1}{2} \times 35 \times 12 = 210.$

Aire(OCL) $= \dfrac{1}{2} \times \text{OC} \times \text{CL} = \dfrac{1}{2} \times 24 \times 7 = 84.$

Aire(OABC) $= \text{OA} \times \text{OC} = 35 \times 24 = 840.$

Aire(OKBL) = Aire(OABC) − Aire(OAK) − Aire(OCL) $= 840 - 210 - 84 = 546.$

% place éclairée $= \dfrac{546}{840} \times 100 = 65\ \%$. L'affirmation du visiteur est vraie.

3) a) $\overrightarrow{\text{OK}} \cdot \overrightarrow{\text{OL}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix} = 12 \times 24 + 35 \times 7 = 533.$

b) $\overrightarrow{\text{OK}} \cdot \overrightarrow{\text{OL}} = \text{OK} \times \text{OL} \times \cos(\widehat{\text{KOL}})$ donc

$$\cos(\widehat{\text{KOL}}) = \frac{\overrightarrow{\text{OK}} \cdot \overrightarrow{\text{OL}}}{\text{OK} \times \text{OL}} = \frac{533}{\sqrt{12^2 + 35^2} \times \sqrt{24^2 + 7^2}} = \frac{533}{37 \times 25} = \frac{533}{925}.$$

$$\widehat{\text{KOL}} = \arccos\left(\frac{533}{925}\right) \approx 54,8^\circ.$$

Exercice 4

Tir au but **(4 points)**

1) Le triangle TAD est rectangle en D donc $\overrightarrow{\text{TD}} \cdot \overrightarrow{\text{DB}} = 0.$

2) a) $\overrightarrow{\text{TA}} \cdot \overrightarrow{\text{TB}} = (\overrightarrow{\text{TD}} + \overrightarrow{\text{DA}}) \cdot (\overrightarrow{\text{TD}} + \overrightarrow{\text{DB}})$

$$= \overrightarrow{\text{TD}}^2 + \underbrace{\overrightarrow{\text{TD}} \cdot \overrightarrow{\text{DB}}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{\text{DA}} \cdot \overrightarrow{\text{TD}}}_{=0} + \overrightarrow{\text{DA}} \cdot \overrightarrow{\text{DB}}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{\text{DA}}$ et $\overrightarrow{\text{DB}}$ sont colinéaires de même sens, on a :

$\overrightarrow{\text{TA}} \cdot \overrightarrow{\text{TB}} = \text{TD}^2 + \text{DA} \times \text{DB}.$

b) $\overrightarrow{\text{TA}} \cdot \overrightarrow{\text{TB}} = 18^2 + 9(9 + 7,32) = 470,88.$

3) $\overrightarrow{\text{TA}} \cdot \overrightarrow{\text{TB}} = \text{TA} \times \text{TB} \times \cos(\widehat{\text{ATB}})$ donc :

$$\cos(\widehat{\text{ATB}}) = \frac{\overrightarrow{\text{TA}} \cdot \overrightarrow{\text{TB}}}{\text{TA} \times \text{TB}} = \frac{470,88}{\sqrt{18^2 + 9^2} \times \sqrt{18^2 + 16,32^2}} = 0,963.$$

$\widehat{\text{ATB}} = \arccos(0,963) \approx 15,6^\circ.$

Exercice 5

Relations métriques **(3 points)**

1) La relation d'Al-Kashi permet de calculer la longueur BC.

$\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2 - 2 \times \text{AB} \times \text{AC} \times \cos(\widehat{\text{BAC}}) = 6^2 + 2^2 - 2 \times 6 \times 2 \times \cos 112^\circ \approx 48,99 \approx 49.$

Donc $\text{BC} \approx 7.$

2) Par une permutation circulaire : $A \to B$, $B \to C$ et $C \to A$ on a :

$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2 \times BC \times BA \times \cos(\widehat{ABC})$ donc :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{BC^2 + BA^2 - AC^2}{2 \times BC \times BA} = \frac{49 + 36 - 4}{2 \times 7 \times 6} = \frac{27}{28}.$$

$$\widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{27}{28}\right) \approx 15,36 \approx 15,4^\circ \text{ au dixième près}$$