Correction devoir de mathématiques

Du lundi 8 novembre 2021

EXERCICE 1

Équations **(4 points)**

1) $x^2 + 2x - 1 = 0$ on a $\Delta = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2 > 0$ deux solutions.

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

2) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

$x_1 = 1$ solution évidente. $P = \dfrac{4}{3}$ donc $x_2 = \dfrac{4}{3}$

3) $18x^2 - 48x + 32 = 0 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} 9x^2 - 24x + 16 = 0 \Leftrightarrow (3x - 4)^2 = 0.$

Un solution double $x_0 = \dfrac{4}{3}$

4) $x^2 + 15x + 400 = 43x \Leftrightarrow x^2 - 28x + 400 = 0$ on a $\Delta = 28^2 - 4 \times 400 = -816 < 0$

Pas de solution.

EXERCICE 2

Équations bicarrées **(3 points)**

1) On veut résoudre l'équation bicarrée (E) : $2x^4 - 14x^2 + 24 = 0$. On pose $X = x^2$.

a) Comme $X = x^2$ on doit avoir $X \geqslant 0$.

b) $2X^2 - 14X + 24 = 0 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} X^2 - 7X + 12 = 0$ on a $\Delta = 49 - 48 = 1 > 0$.

Deux solutions $X_1 = \dfrac{7+1}{2} = 4$ ou $X_2 = \dfrac{7-1}{2} = 3$.

c) On revient à x : $x^2 = 4$ ou $x^2 = 3$, on trouve alors 4 solutions :

$x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = \sqrt{3},\ x_1 = -\sqrt{3}$. d'où $S = \{-2\,;-\sqrt{3}\,;\ \sqrt{3}\,;\ 2\}$

2) $x^4 - 32x^2 - 144 = 0$, on pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$.

L'équation devient : $X^2 - 32X - 144 = 0$ on a $\Delta = 32^2 + 4 \times 144 = 1\,600 = 40^2 > 0$

Deux solutions : $X_1 = \dfrac{32+40}{2} = 36$ ou $X_2 = \dfrac{32-40}{2} = -4 < 0$ (non retenu)

On revient à x : $x^2 = 36$ deux solutions $x_1 = 6$ ou $x_2 = -6$ d'où $S = \{-6\,;\ 6\}$.

EXERCICE 3

Inéquation **(4 points)**

1) $5x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x(5x - 3) > 0$ deux racines $x_1 = 0$ ou $x_2 = \dfrac{3}{5}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$x(5x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;\ 0[\cup \left]\dfrac{3}{5}\,;+\infty\right[$

2) $x^2 + 3x - 12 \leqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 12 < 0$ on a $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

Deux racines : $x_1 = \dfrac{-1+7}{2} = 3$ ou $x_2 = \dfrac{-1-7}{2} = -4$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
x^2+x-12		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = [-4\,;\,3]$

3) $\dfrac{-2x^2 - x + 3}{x} \geqslant 0$, $D_f = \mathbb{R}^*$. Valeurs frontières : $x = 0$ ou

$-2x^2 - x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1$ racine évidente $P = -\dfrac{3}{2}$ donc $x_2 = -\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		1		$+\infty$
$-2x^2 - x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2x^2 - x + 3}{x}$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right] \cup \left]0\,;\,1\right]$

Exercice 4

Équation paramétrique **(2 points)**

Pour que l'équation (E_m) admette deux solutions négatives, on doit avoir :

$$m \neq 2 \;,\; \Delta > 0 \;,\; S < 0 \text{ et } P > 0$$

- Signe de Δ :

  $\Delta = 4(m-2)^2 - 4(m-2)(4m-7) = 4(m-2)(m-2-4m+7) = 4(m-2)(-3m+5)$

  $\Delta = 0 \;\Leftrightarrow\; m - 2 = 0$ ou $-3m + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; m = 2$ ou $m = \dfrac{5}{3}$

m	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$		$-$	

$\Delta > 0 \;\Rightarrow\; m \in \left]\dfrac{5}{3}\,;\,2\right[$

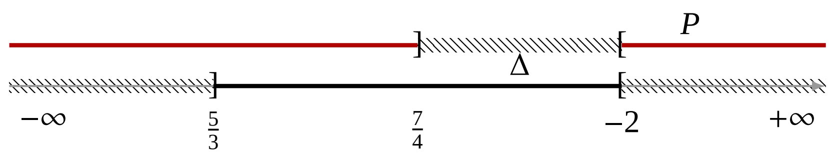
- Signe de S : $S = \dfrac{-2(m-2)}{m-2} = -2 < 0$ toujours vérifié

- Signe de P : $P = \dfrac{4m-7}{m-2}$, valeurs frontières : $m = \dfrac{7}{4}$ ou $m = 2$.

m	$-\infty$		$\frac{7}{4}$		2		$+\infty$
P		$+$	0	$-$		$+$	

$P > 0 \;\Rightarrow\; m \in \left]-\infty\,;\,\dfrac{7}{4}\right[\cup \left]2\,;+\infty\right[$

- Conclusion :



(E_m) admet deux solutions négatives si $m \in \left]\dfrac{5}{3}\,;\,\dfrac{7}{4}\right[$

EXERCICE 5

Courbe du second degré **(1 point)**

1) $a > 0$ et $c < 0$: faux car la parobole est dirigée vers le bas donc $a < 0$
2) c et Δ sont de même signe : **vrai** car la courbe coupe l'axe des ordonnées en une ordonnée positive $c > 0$ et la courbe coupe deux fois l'axe des abscisses $\Delta > 0$.
3) $a < 0$ et $c < 0$: faux car $c > 0$
4) $a < 0$ et $\Delta < 0$: faux car $\Delta > 0$.

EXERCICE 6

Artisan en confiture **(5 points)**

1) $R(x) = 14x$.
2) a) $B(x) = R(x) - C(x) = 14x - 0,1x^2 - 0,7x - 100 = -0,1x^2 + 13,3x - 100$.

   b) Racines de $B(x)$: $\Delta = 13,3^2 - 4 \times 0,1 \times 100 = 136,89 = (11,7)^2 > 0$

   Deux racines : $x_1 = \dfrac{-13,3 + 11,7}{-0,1} = 8$ ou $x_2 = \dfrac{-13,3 - 11,7}{-0,1} = 125$.

m	0		8		125		160
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$x \in [8\ ;\ 125]$

L'artisan réalise un bénéfice positif s'il vend entre 8 kg et 125 kg de confiture.

3) a) $B(x) = -0,1x^2 + 13,3x - 100$

$$= -0,1(x^2 - 133x + 1000) = -0,1\left[(x - 66.5)^2 - 66,5^2 + 1000\right]$$
$$-0,1\left[(x - 66,5)^2 - 3\,422,25\right] = -0,1(x - 66,5)^2 + 342,225$$

   b) On a le tableau de variation de $B(x)$ avec $a = -0,1$, $\alpha = 66,5$ et $\beta = 342,225$

x	0		66,5		160
$B(x)$	-100	$\nearrow$	342,225	$\searrow$	-532

   c) Pour que le bénéfice soit maximal, l'artisan doit vendre 66,5 kg de confiture et son bénéfice sera alors de 342,23 €.

   Remarque : Si l'on cherche un nombre entier de kg : $B(66) = B(67) = 342,2$.
   Si l'artisan vend 66 kg ou 67 kg de confiture, il réalisera un bénéfice maximal d'un montant de 342,20 €.