Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 9 décembre 2021

EXERCICE 1

Monotonie d'une suite **(2 points)**

1) $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 - (n+1) - 2n^2 + n = 2n^2 + 4n + 2 - n - 1 - 2n^2 + n = 4n + 1.$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est strictement croissante.

EXERCICE 2

Suite arithmétique et suite géométrique **(5 points)**

1) a) $u_8 = u_4 + 4r \;\Rightarrow\; r = \dfrac{u_8 - u_4}{4} = \dfrac{25 - 18}{4} = \dfrac{7}{4}.$

$u_4 = u_0 + 4r \;\Rightarrow\; u_0 = u_4 - 4r = 18 - 4 \times \dfrac{7}{4} = 11.$

b) $u_{14} = u_0 + 14r = 11 + 14 \times \dfrac{7}{4} = 11 + \dfrac{49}{2} = \dfrac{71}{2}.$

2) S est la somme des premiers termes d'une suite arithmétique de raison 7 et de premier terme 26.

$S = \text{Nbre de termes} \times \dfrac{\sum \text{termes extrêmes}}{2}$

Nbre de termes : $\dfrac{2021 - 26}{7} + 1 = 286$

Donc $S = 286 \times \dfrac{26 + 2021}{2} = 292\,721$

3) a) $v_5 = v_2 q^3 \;\Rightarrow\; q^3 = \dfrac{486}{18} = 27 = 3^3 \;\Rightarrow\; q = 3$

$v_2 = v_0 q^2 \;\Rightarrow\; v_0 = \dfrac{v_2}{q^2} = \dfrac{18}{9} = 2.$

b) S' est la somme des 8 premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 3$:

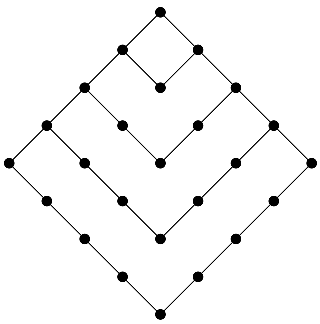
$S' = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$ donc $S' = 2 \times \dfrac{1 - 3^8}{1 - 3} = 3^8 - 1 = 6\,560.$

EXERCICE 3

Nombres carrés **(3 points)**

1) On obtient le 5e nombre carré suivant :

Nbre de points : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$



2) $c_6 = 36 = 6^2$ et $c_7 = 49 = 7^2$.

3) Conjecture : $c_n = n^2$

(c_n) est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

$c_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n \times \dfrac{1 + 2n - 1}{2} = n^2.$

EXERCICE 4

Suite arithmético-géométrique **(5 points)**

1) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5u_n + 3 - 6 = 0.5u_n - 3 = 0,5(u_n - 6) = 0,5v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,5$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 1$.

b) $v_n = v_0 q^n = 0,5^n$ donc $u_n = v_n + 6 = 0,5^n + 6$.

c) $u_8 = 0,5^8 + 6 \approx 6,004$ à 10^{-3} près.

On peut conjecturer que la suite tend vers 6.
En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$ par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n + 6 = 6$

2) a) $S = v_0 \times \dfrac{1 - 0,5^{101}}{1 - 0,5} = 2(1 - 0,5^{101}) \approx 2$.

b) $S' = (v_0 + 6) + (v_1 + 6) + \cdots + (v_{100} + 6) = S_n + 101 \times 6 \approx= 608$.

EXERCICE 5

Rebonds d'une balle **(5 points)**

1) $h_1 = 3 - 0.25 \times 3 = 2,25$ et $h_2 = 2,25 - 0,25 \times 2,25 = 1,687\,5$.

2) $h_1 - h_0 = 0,75$ et $h_2 - h_1 = 0,562\,5$ donc $h_1 - h_0 \neq h_2 - h_1$.
La suite (h_n) n'est pas arithmétique.

3) Exprimons h_{n+1} en fonction de h_n : $h_{n+1} = h_n - 0,25h_n = 0,75h_n$.
La suite (h_n) est géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $h_0 = 3$.

4) $h_6 = h_0 q^6 = 3 \times 0,75^6 \approx 0,534$.
La hauteur de la balle après 6 rebonds est de 53 cm.

5) On obtient l'algorithme suivant :

```
def seuil():
    h=3
    n=0
    while h>0.1:
        h=h*0.75
        n=n+1
    return n
```

Le programme renvoie 12

vérification : $u_{11} \approx 0,126$ et $u_{12} \approx 0,095$