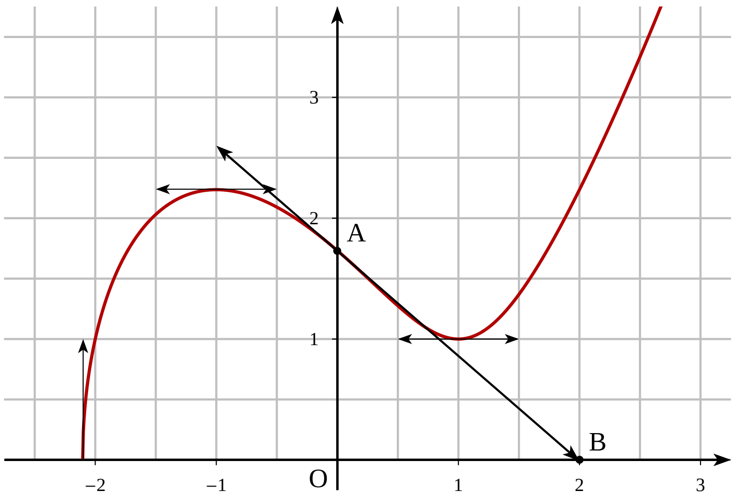
Contrôle de mathématiques

Jeudi 27 janvier 2022

EXERCICE 1

Représentation graphique **(5 points)**

Soit la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2,1\,;+\infty[$.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ en A$(0\,;\ 1,73)$ passe par le point B$(2\,;\ 0)$.



À l'aide de cette représentation graphique, répondre aux questions suivantes :

1) a) Donner les valeurs de $f'(-1)$, $f'(1)$.
   b) Déterminer $f'(0)$.
2) a) Expliquer comment résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1,5$.
   b) Avec la précision du graphique, donner les solutions de l'équation $f(x) = 1,5$.
   c) Avec la précision du graphique, donner les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 1$
3) En supposant que la fenêtre du graphique donne les variations de f, dresser le tableau de variations de f sur $[-2,1\,;+\infty[$. en faisant figurer le signe de la dérivée de f.
4) Que peut-on dire de la dérivée de f en $x = -2,1$? Pourquoi ?

EXERCICE 2

Calcul de dérivées **(8 points)**

Pour les fonctions suivantes :

- déterminer l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable
- déterminer la fonction dérivée
- réduire au même dénominateur si nécessaire et factoriser lorsque cela est possible.

1) $f(x) = 3x^4 - 18x^2 + 21$

2) $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$

3) $f(x) = \sqrt{5-2x}$

4) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$

5) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-3x}$

6) $f(x) = (2x-5)\sqrt{2x+1}$

7) $f(x) = (3x^2-5x+1)^3$

Exercice 3

Équation de la tangente **(2 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

1) Déterminer la fonction dérivée f'.

2) Déterminer l'équation de la tangente T_2 en $x = 2$

Exercice 4

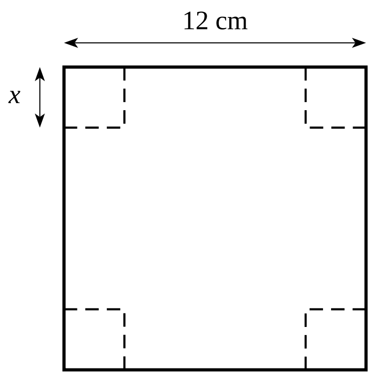
Boîte en carton **(5 points)**

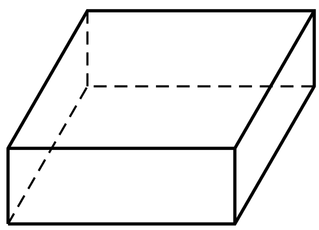
1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$

   a) Calculer puis factoriser la fonction dérivée f'.

   b) Résoudre $f'(x) = 0$ puis dresser le tableau de variations.

2) Dans une plaque de carton carrée de 12 cm de côté, on découpe, aux quatre coins, des carrés identiques afin de construire une boîte sans couvercle, comme indiqué sur les figures ci-dessous.





On note x la longueur (en cm) du côté de chacun des carrés découpés.

On admet que $x \in]0\ ;\ 6[$

L'objectif est de déterminer la longueur x permettant d'obtenir une boîte de volume maximal.

   a) Montrer que le volume de la boîte est égal à 100 cm^3 pour $x = 1$. Détailler le calcul.

   b) Montrer que, pour $x \in]0; 6[$, le volume de la boîte est égal à $f(x)$, f étant la fonction étudiée à la question 1).

   c) Quelle est la valeur de x permettant d'obtenir une boîte de volume maximal ?
   Quel est alors le volume de la boîte ?