

Contrôle de mathématiques

Jeudi 17 février 2022

EXERCICE 1

Propriétés algébriques

(5 points)

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$\text{a) } A = \frac{e^6 \times e^{-4}}{e^{-3}} \quad \text{b) } B = \frac{e^{1+x}}{e^{x+2}} \quad \text{c) } C = \frac{(e^{-2x})^3 e^{4x}}{e^{-2x}}$$

2) Montrer les égalités suivant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } 2e^{2x} + 6e^x - 8 = 2(e^x - 1)(e^x + 4) \quad \text{b) } \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}$$

EXERCICE 2

Résolution d'équations et d'inéquations

(4 points)

1) Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} en se justifiant rigoureusement :

$$\text{a) } (7x - 23)e^x = 0 \quad \text{b) } e^{2x+3} = e$$

2) Résoudre les inéquations suivante dans \mathbb{R} en se justifiant rigoureusement :

$$\text{a) } e^{-x} - 1 \leq 0 \quad \text{b) } (6 - 3x)e^x > 0$$

EXERCICE 3

Variations de fonctions

(5 points)

1) Soit la fonction f définie sur $[0 ; 5]$ par : $f(x) = (4x - 1)e^{-x}$

- Déterminer et factoriser $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f .
- Résoudre $f'(x) = 0$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 5]$ en précisant les valeurs exactes des bornes et du maximum de f .

2) Soit la fonction g définie sur $[-5 ; 3]$ par : $g(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$.

- Déterminer et factoriser $g'(x)$ où g' est la fonction dérivée de f .
- Résoudre $g'(x) = 0$ puis dresser le tableau de variations de g sur $[-5 ; 3]$ en précisant les valeurs exactes des bornes et des extremums de g .

EXERCICE 4

Smartphone

(6 points)

Une entreprise vend des smartphones d'un seul modèle « haut de gamme ».

Le service marketing modélise le nombre de smartphones de ce modèle vendus par trimestre en fonction du prix de vente x par la fonction N définie par

$$N(x) = 100 e^{-2x} \quad \text{où :}$$

- x : prix de vente en **milliers d'euros** d'un smartphone de ce modèle. Le prix du smartphone de ce modèle est compris entre 400 € et 2000 € ; on a donc $x \in [0, 4 ; 2]$.
- $N(x)$: nombre de smartphones de ce modèle vendus par trimestre en **millions d'unités**.

1) Le service commercial fixe le prix de vente de ce smartphone à 1000 €.

Quel sera le nombre de smartphones vendus par trimestre ? Arrondir à mille unités.

La recette trimestrielle $R(x)$ est obtenue en multipliant le nombre de smartphones vendus par le prix de vente. On obtient $R(x) = x N(x)$ en **milliards d'euros**.

Le coût de production en **milliards d'euros** en fonction du nombre de smartphones fabriqués est modélisé par la fonction C définie par

$$C(x) = 0,4 N(x)$$

Le bénéfice est obtenu en calculant la différence entre la recette et le coût de production.

- 2) Vérifier que le bénéfice trimestriel peut être estimé à 8,120 milliards d'euros pour un prix de vente 1000 €.
- 3) Montrer que le bénéfice trimestriel s'exprime en milliards d'euros en fonction du prix de vente x par : $B(x) = (100x - 40) e^{-2x}$.
- 4) Pour tout réel $x \in [0, 4 ; 2]$, calculer la dérivée $B'(x)$ que l'on factorisera.
- 5) Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0, 4 ; 2]$.
- 6) À quel prix faut-il vendre ces smartphones pour assurer un bénéfice maximal que l'on déterminera au millions d'euros près.