Contrôle de mathématiques

Lundi 30 mai 2022

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Dans un repère orthonormé, on a : $\overrightarrow{AB} = (-1\,;\,5)$, alors la longueur AB vaut :

a) 24 b) $\sqrt{24}$ c) 26 d) $\sqrt{26}$

2) Dans un repère orthonormé, on a : $\overrightarrow{AB} = (-4\,;\,3)$ et $\overrightarrow{BC} = (-1\,;\,5)$.
Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$ vaut :

a) -19 b) 23 c) 19 d) -23

3) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 2$.
La quantité : $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$ vaut :

a) 0 b) 5 c) 6 d) 12

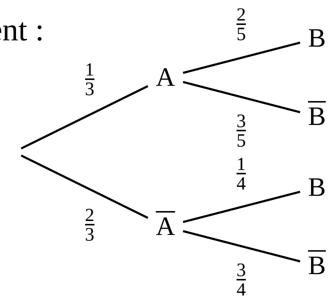
4) Soit un triangle ABC tel que : AB = 6, AC = 4, BC = 5. Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ vaut :

a) 27 b) $\dfrac{5}{2}$ c) 0 d) $\dfrac{27}{2}$

5) En utilisant l'arbre de probabilité c-dessous, on obtient :

a) $p(B) = \dfrac{1}{4}$ b) $p(B) = \dfrac{2}{5}$

c) $p(B) = \dfrac{13}{20}$ d) $p(B) = \dfrac{3}{10}$



EXERCICE 2

Triangle **(5 points)**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A$(-4\,;\,10)$, B$(8\,;\,16)$, C$(8\,;\,-2)$, H$(2\,;\,10)$ et K$(5\,;\,7)$.

1) a) Déterminer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB}$

b) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

2) a) Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment [BC]

b) On admet que le centre de gravité G vérifie la relation : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Déterminer les coordonnées du point G.

3) Montrer que le point K est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

4) Montrer que les points G, H et K sont alignés.

EXERCICE 3

Angle et projection **(5 points)**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points A(3 ; −2), B(5 ; 2), C(−1 ; 1).

1) Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2) Montrer que : $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{2}{5\sqrt{5}}$ puis en déduire $\widehat{BAC}$ au dixième de degré près.
3) Soit le point H projection orthogonale du point C sur la droite (AB).

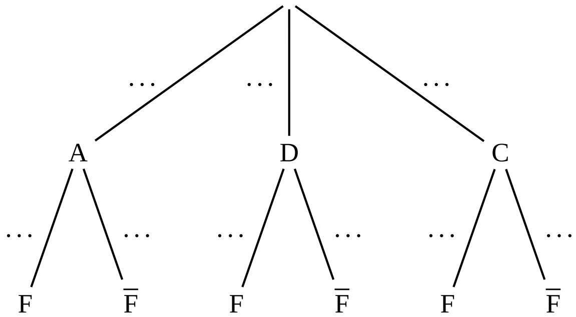
   Calculer la longueur AH puis en déduire que $HC = \dfrac{11}{\sqrt{5}}$.
4) Calculer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 4

Cinéma et friandises **(5 points)**

La gestionnaire d'un cinéma s'intéresse à la catégorie des films vus par ses spectateurs, ainsi qu'à leur consommation au rayon « friandises ». Une étude sur plusieurs mois a montré que 40 % des spectateurs sont allés voir un film d'action, 35 % un dessin animé et les autres une comédie.
Parmi les spectateurs allant voir un film d'action, la moitié achètent des friandises, alors qu'ils sont 80 % pour ceux allant voir un dessin animé et 70 % pour ceux allant voir une comédie.
On interroge au hasard un spectateur sortant du cinéma et on note les événements
A : « le spectateur a vu un film d'action »,
D : « le spectateur a vu un dessin animé »,
C : « le spectateur a vu une comédie »,
F : « le spectateur a acheté des friandises »

1) Reproduire et compléter sur la copie l'arbre de probabilité suivant :



2) Démontrer que $p(F) = 0,655$.
3) On interroge au hasard un spectateur ayant acheté des friandises. Quelle est la probabilité qu'il ait vu un dessin animé ? On donnera l'arrondi à 10^{-3}.
4) Une place de cinéma coûte 10 €. On considérera que si un spectateur achète des friandises, il dépense 18 € pour sa place de cinéma et ses friandises.

   Soit X la variable aléatoire donnant le coût d'une sortie au cinéma pour un spectateur.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) En déduire le coût moyen par spectateur d'une sortie dans ce cinéma.