Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 30 mai 2022

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse d) :** $AB = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

2) **Réponse a) :** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = -4 - 15 = -19$

3) **Réponse b) :** $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 \underbrace{-\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u}}_{=0} - \|\vec{v}\|^2 = 9 - 4 = 5$

4) **Réponse d) :** $BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + AB^2$

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2) = \dfrac{1}{2}(36 + 16 - 25) = \dfrac{27}{2}$

5) **Réponse d) :** $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(A)p_A(B) + p(\overline{A})p_{\overline{A}}(B)$ donc

$p(B) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4+5}{30} = \dfrac{3}{10}$

EXERCICE 2

Triangle **(5 points)**

1) a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} 8-(-4) \\ 16-10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8-2 \\ -2-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix} = 72 - 72 = 0$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} 8-(-4) \\ -2-10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8-2 \\ 16-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 72 - 72 = 0$

b) $(HC) \perp (AB)$ et $(HB) \perp (AC)$ donc H est l'intersection des hauteurs issues de C et B du triangle ABC donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

2) a) $I = \left(\dfrac{8+8}{2} ; \dfrac{16-2}{2}\right) = (8 ; 7)$

b) On pose $G(x ; y)$, en remplaçant dans l'égalité vectorielle, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-(-4) \\ y-10 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 8-(-4) \\ 7-10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+4 \\ y-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$$

3) $KA^2 = [5-(-4)]^2 + (7-10)^2 = 81 + 9 = 90$

$KB^2 = (5-8)^2 + (7-16)^2 = 9 + 81 = 90$

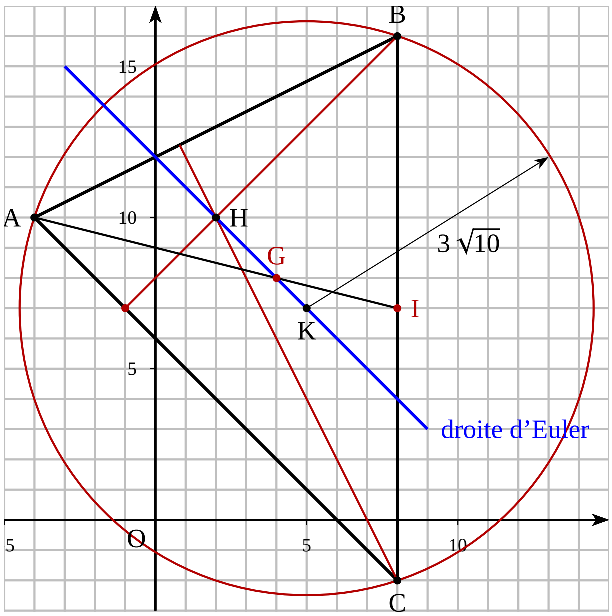
$KC^2 = (5-8)^2 + [7-(-2)]^2 = 9 + 81 = 90$

On a : $KA = KB = KC$ donc K est le centre du cercle circonscrit.

4) $\det(\overrightarrow{GK}, \overrightarrow{GH}) = \begin{vmatrix} 5-4 & 2-4 \\ 7-8 & 10-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires donc les points G, K et H sont alignés.

Remarque : Cette droite s'appelle la droite d'Euler.



EXERCICE 3

Angle et projection **(5 points)**

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 2-(-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1-3 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = -8+12 = 4.$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\widehat{BAC} \Rightarrow \cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

$AB = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{4}{10\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5\sqrt{5}} \Rightarrow \widehat{BAC} = \arccos\left(\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right) \approx 79,7°.$

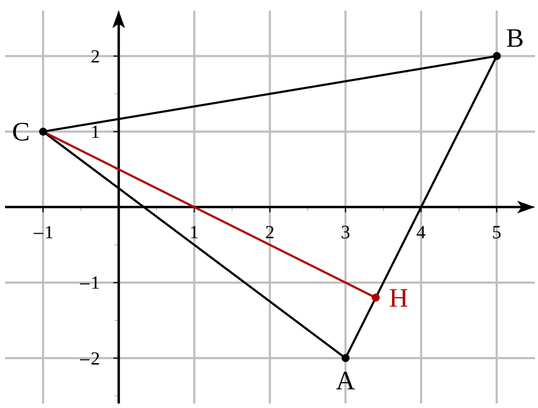
3) Comme H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$, on a :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH \Rightarrow AH = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

D'après le théorème de Pythagore dans AHC rectangle en H :

$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 25 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{125-4}{5} = \dfrac{121}{5} \Rightarrow CH = \dfrac{11}{\sqrt{5}}$

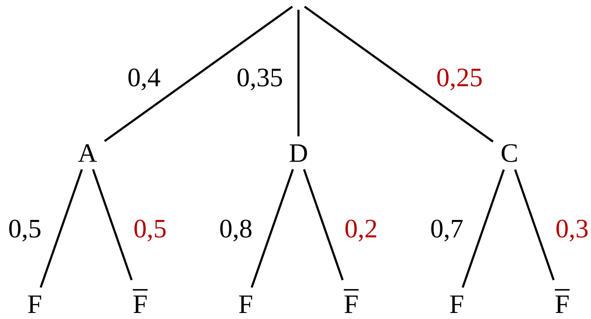
4) $\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{1}{2} AB \times CH = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \dfrac{11}{\sqrt{5}} = 11$



EXERCICE 4

Cinéma et friandises **(5 points)**

1) D'après l'énoncé, on a :
   $p(\mathrm{A}) = 0,4$, $p(\mathrm{D}) = 0,35$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{F}) = 0,5$, $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{F}) = 0,8$, $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{F}) = 0,7$



2) $p(\mathrm{F}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}) + p(\mathrm{D} \cap \mathrm{F}) + p(\mathrm{C} \cap \mathrm{F}) = p(\mathrm{A})p_{\mathrm{A}}(\mathrm{F}) + p(\mathrm{D})p_{\mathrm{D}}(\mathrm{F}) + p(\mathrm{C})p_{\mathrm{C}}(\mathrm{F})$
   $= 0,4 \times 0,5 + 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,7 = 0,655.$

3) $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{D}) = \dfrac{p(\mathrm{D} \cap \mathrm{F})}{p(\mathrm{F})} = \dfrac{0,35 \times 0,8}{0,655} \approx 0,427$

4) a) X prend les valeurs 10 et 18 :
   $p(X = 18) = p(\mathrm{F}) = 0,655$ et $p(X = 10) = p(\overline{\mathrm{F}}) = 1 - 0,655 = 0,345$

   D'où la loi de probabilité de X :

x_i	10	18
$p(X = x_i)$	0,345	0,655

   b) $\mathrm{E}(X) = \sum p_i x_i = 0,345 \times 10 + 0,655 \times 18 = 15,24$

   Le coût moyen par spectateur est donc de 15,24 €.