BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE

Durée de l'épreuve : 2 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 8

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*

EXERCICE 1 (5 points)

1) **Réponse a)** en effet $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 100\, e^{100x} > 0$ donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) **Réponse d)** pour déterminer l'axe de symétrie, on détermine la forme canonique :

$$f(x) = 100x^2 + 10x + 1 = 100(x^2 + 0,1x + 0,01) = 100\left[(x + 0,05)^2 - 0,0025 + 0,01\right]$$
$$= 100\left[(x + 0,05)^2 + 0,0075\right]$$

L'axe de symétrie se trouve alors en $x = -0,05$.
Autre méthode, on cherche le zéro de la dérivée.

3) **Réponse c)** On cherche les zéros de la fonction $b - a$:
$b(x) - a(x) = 25x^2 + 5x - 100 - (3x^2 + 15x + 1) = 22x^2 - 10x - 101$ donc
$\Delta = 10^2 - 4 \times 22 \times (-101) = 8988 > 0$, la fonction $b - a$ admet deux zéros
Les courbes représentatives de a et b admettent alors deux points d'intersection.

4) **Réponse d)** On utilise la formule de la somme d'une suite géométrique :

$$S = \underbrace{1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{10}}_{\text{11 termes}} = \frac{1 - 5^{11}}{1 - 5} = \frac{5^{11} - 1}{4} = 12\,207\,031$$

5) **Réponse c)** Comme $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes horizontales en -1 et 3, on a : $f'(-1) = f'(3) = 0$.

EXERCICE 2 (5 points)

1) Graphiquement : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ et $x_2 = 1$.

2) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ racine évidente $P = -\dfrac{1}{3}$ donc $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

Le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{32}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Soit $\delta(x)$ la distance entre la courbe $\mathscr{C}_g$ et la droite d au point d'abscisse x :
$\delta(x) = g(x) - (x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1 = f(x)$, on a alors les cas suivants :
- Si $x = -1$ ou $x = 1$ alors $\delta(x) = 0$: la courbe $\mathscr{C}_g$ et la droite d sont sécantes.
- Si $x \in]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;\,1[$ alors $\delta(x) < 0$: la la courbe $\mathscr{C}_g$ est en dessous de la droite d.
- Si $x \in]1\,;+\infty[$ alors $\delta(x) > 0$: la la courbe $\mathscr{C}_g$ est au dessus de la droite d.

EXERCICE 3 (5 points)

1) a) Pour la suite (u_n), on a $u_{n+1} = 1,21u_n$:

n	1	2	3
u_n	20,9	25,3	30,6
v_n	22,1	25,5	27,8

b) Soit r_n les valeurs réelles (en milliers) des voitures électriques immatriculées l'année 2015+ n. Calculons les écarts avec les deux modèles :

n	1	2	3
$\lvert u_n - r_n \rvert$	0,9	0,4	0,5
$\lvert v_n - r_n \rvert$	0,3	0,6	3,3

À part la première année, le modèle 1 donne une meilleures estimations des immatriculations surtout la troisième valeurs où la différences entre les deux modèles est importante. Le modèle 1 est donc le mieux adapté pour une projection dans le temps des immatriculations.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1,21 u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,21$.

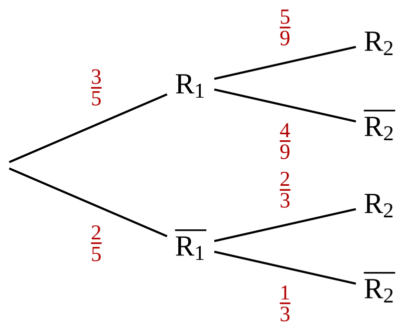
b) $u_n = u_0\, q^n = 17,3 \times 1,21^n$.

3) L'algorithme détermine la plus petite valeur de n à partir de laquelle $u_n > 50$. On trouve $n = 6$.

À partir de l'année 2021, d'après le modèle 1, le nombre de voitures électriques immatriculées dépassera 50 000

EXERCICE 4 **(5 points)**

1) D'après l'énoncé on a : $p(\mathrm{R_1}) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$, $p_{\mathrm{R_1}}(\mathrm{R_2}) = \dfrac{5}{9}$ et $p_{\overline{\mathrm{R_1}}}(\mathrm{R_2}) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$



2) a) $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{R_1} \cap \mathrm{R_2}) = p(\mathrm{R_1}) \times p_{\mathrm{R_1}}(\mathrm{R_2}) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{9} = \dfrac{1}{3}$.

b) L'événement $\overline{\mathrm{A}}$: « le joueur obtient au moins un jeton noir ».

3) $p(\mathrm{R_2}) = p(\mathrm{R_1} \cap \mathrm{R_2}) + p(\overline{\mathrm{R_1}} \cap \mathrm{R_2}) = \dfrac{1}{3} + p(\overline{\mathrm{R_1}}) \times p_{\overline{\mathrm{R_1}}}(\mathrm{R_2}) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{5+4}{15} = \dfrac{9}{5} = \dfrac{3}{5} = 0,6$

4) Il faut calculer : $p_{\overline{R_2}}(\mathrm{R_1}) = \dfrac{p(\mathrm{R_1} \cap \overline{\mathrm{R_2}})}{\overline{R_2}}$.

- $p(\mathrm{R_1} \cap \overline{\mathrm{R_2}}) = p(\mathrm{R_1}) \times p_{\mathrm{R_1}}(\overline{\mathrm{R_2}}) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{15}$
- $p(\overline{\mathrm{R_2}}) = p(\mathrm{R_1} \cap \overline{\mathrm{R_2}}) + p(\overline{\mathrm{R_1}} \cap \overline{\mathrm{R_2}}) = \dfrac{4}{15} + p(\overline{\mathrm{R_1}}) \times p_{\overline{\mathrm{R_1}}}(\overline{\mathrm{R_2}}) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4+2}{15} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$
- $p_{\overline{R_2}}(\mathrm{R_1}) = \dfrac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{4}{15} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{2}{3}$

Il y a effectivement plus de 50 % de chance que le premier jeton tiré ait été de couleur rouge sachant que le deuxième était noir.

Remarque : On pourrait inverser dans l'arbre les indices 1 et 2 donc $p_{\overline{R_2}}(\mathrm{R_1}) = p_{\overline{\mathrm{R_1}}}(\mathrm{R_2}) = \dfrac{2}{3}$.